FILI‘ERE MPSI/PCSI

Première partie du test
Vérification des techniques calculatoires de base.

Exercice 1 *Dérivation.*
Soit la fonction $f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^3$ définie sur $]-1, +\infty[$.

1. Déterminer les limites de $f(x)$ quand $x \to -1$ avec $x > -1$ et quand $x \to +\infty$
2. Calculer la dérivée $f'(x)$ de $f(x)$.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. Déterminer les réels a tels que la tangente à la courbe au point A d'abscisse a passe par l'origine O du repère.

Exercice 2 *Calcul de primitives.*
Déterminer les primitives des fonctions suivantes en précisant sur quel intervalle elles sont définies :

1. $a(x) = \cos(3x) + 2\sin(5x)$
2. $b(x) = 4e^{-6x}$
3. $c(x) = \cos(x)\sin(x)$
4. $d(x) = \dfrac{1}{(x-a)^n} (n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R})$, on distinguera $n \neq 1$ et $n = 1$
5. $e(x) = \dfrac{x+1}{(x^2+2x+2)^2}$
6. $f(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$

Exercice 3 *Nombres complexes.*
Soit (e) l'équation $z^3 - 1 = 0$ d'inconnue z complexe.

1. Déterminer une solution évidente de l'équation (e), on la notera α.
2. Déterminer les réels a, b, c tels que pour tout complexe z :

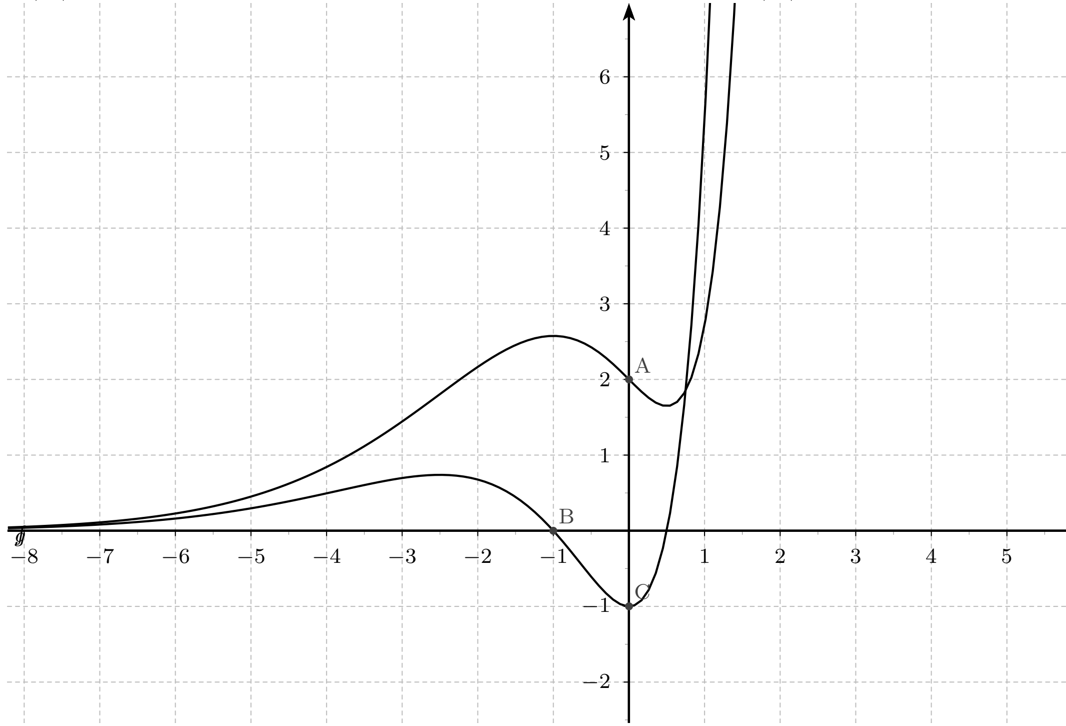
$$z^3 - 1 = (z-\alpha)(az^2 + bz + c)$$

3. En déduire que l'équation (e) admet trois solutions α, z_1, z_2 dans $\mathbb{C}$ dont vous donnerez la forme algébrique.
4. Le plan est muni d'un repère orthonormé. On considère les points A, B, C d'affixes respectifs α, z_1, z_2. Faire une figure. Quelle est la nature du triangle ABC ? démontrez votre réponse.

Exercice 4
Dans un repère orthonormé on a tracé les courbes représentatives d'une fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et de sa dérivée g' (figure ci-dessous). On sait que l'expression de la fonction g est de la forme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$$

où a, b, c sont trois réels. Déterminer les trois nombres réels a, b, c.



FILIÈRE MPSI/PCSI

Deuxième partie du test Les exercices suivants demandent un peu plus de recherche et d'initiatives.

Exercice 5

a) Soit u la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n^2$$
Donner l'expression de u_n en fonction de u_0 et de n.

1. Soit a un réel et v la suite définie par $v_0 \in \mathbb{R}$ et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = av_n^2$$
Donner l'expression de v_n en fonction de v_0, a et n.

Exercice 6

Pour un entier naturel n, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n. Par exemple $d(12) = 6$.

1. Si n est un nombre entier qui s' écrit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$ où les p_i sont des nombres premiers deux à deux distincts et α_i des entiers naturels, trouver l'expression de $d(n)$ en fonction des α_i.
2. Quels sont les entiers naturels n pour lesquels $d(n)$ est impair ?

Exercice 7

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Montrer que
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

Exercice 8

Soit a un réel tel que $a + \dfrac{1}{a}$ est un entier relatif. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $a^n + \dfrac{1}{a^n}$ est un entier relatif.