Suites et raisonnement par récurrence

Correction 1

1. Une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ vérifie la relation :
$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}$$
Ainsi, on obtient la valeur des cinq premiers termes de la suite (u_n) :
   - $u_0 = \frac{3}{4}$
   - $u_1 = u_0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$
   - $u_2 = u_1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{4}$
   - $u_3 = u_2 + \frac{1}{2} = \frac{7}{4} + \frac{1}{2} = \frac{9}{4}$
   - $u_4 = u_3 + \frac{1}{2} = \frac{9}{4} + \frac{1}{2} = \frac{11}{4}$

2. La suite (u_n) est arithmétique de premier terme $\frac{3}{4}$ et de raison $\frac{1}{2}$; ainsi, le terme u_n de rang n vérifie explicitement la formule suivante :
$$u_n = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot n$$

3. D'après la formule explicite du terme u_n de rang n, on obtient :
   - $u_5 = \frac{3}{4} + 5 \times \frac{1}{2} = \frac{13}{4}$
   - $u_{12} = \frac{3}{4} + 12 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + 6 = \frac{27}{4}$

La somme S est la somme des termes consécutif de la suite de u_5 à u_{12} ; c'est donc la somme de $12-5+1=8$ termes consécutifs de cette suite ; ainsi, la valeur de S est donnée par la formule :
$$S = \frac{(u_5 + u_{12}) \times 8}{2} = \frac{\left(\frac{13}{4} + \frac{27}{4}\right) \times 8}{2}$$
$$= \left(\frac{13}{4} + \frac{27}{4}\right) \times 4 = \frac{40}{4} \times 4 = 40$$

Correction 2

1. La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $\frac{16}{27}$ et de raison $\frac{3}{2}$; ainsi, on peut déterminer les cinq premiers termes de la suite :
   - $u_0 = \frac{16}{27}$
   - $u_1 = \frac{3}{2} \times \frac{16}{27} = \frac{8}{9}$
   - $u_2 = \frac{3}{2} \times \frac{8}{9} = \frac{4}{3}$
   - $u_3 = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$
   - $u_4 = \frac{3}{2} \times 2 = \frac{6}{2} = 3$

2. La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $\frac{16}{27}$ et de raison $\frac{3}{2}$; ainsi, le terme u_n de rang n est donnée par la formule explicite suivante :
$$u_n = u_0 \cdot q^n = \frac{16}{27} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

3. La suite S est la somme des termes consécutifs de rang 3 au rang 16 ; ainsi, cette somme comprend $16-3+1=14$ termes. D'après la formule de la somme des termes d'une suite géométrique, on a la valeur de S :
$$S = u_3 + \cdots + u_{16} = u_3 \times \frac{1 - q^{14}}{1 - q} = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{14}}{1 - \frac{3}{2}}$$
$$= 2 \times \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{14}}{-\frac{1}{2}} = 2 \times \left[1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{14}\right] \times \left(-\frac{2}{1}\right)$$
$$= -4 \cdot \left[1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{14}\right] = 4 \cdot \left[\left(\frac{3}{2}\right)^{14} - 1\right]$$

Correction 3

1. a. Pour passer du terme de rang 4 à celui de rang 7, il faut ajouter 3 fois la raison ; en notant r la raison de suite arithmétique, on obtient l'égalité :
$$u_7 = u_4 + 3 \cdot r$$
$$15 = 3 + 3 \cdot r$$
$$3 \cdot r = 12$$
$$r = \frac{12}{3} = 4$$
La suite (u_n) est un suite arithmétique de raison 3 ; la formule explicite admet une expression de la forme :
$$u_n = u_0 + n \cdot r$$
$$u_n = u_0 + 4 \cdot n$$
En appliquant cette égalité au rang 4 :
$$u_4 = u_0 + 4 \times 4$$
$$3 = u_0 + 16$$
$$u_0 = 3 - 16$$
$$u_0 = -13$$
La suite (u_n) est la suite arithmétique de premier terme -13 et de raison 4.

   b. Ainsi, la suite (u_n) est définie par la formule par récurrence :
$$u_0 = -13 \quad ; \quad u_{n+1} = u_n + 4$$
La suite (u_n) admet la formule explicite :
$$u_n = 4 \cdot n - 13$$

2. a. Pour passer du terme de rang 2 au terme de rang 5, il faut multiplier trois fois par la raison ; on obtient l'égalité suivante :
$$v_5 = v_2 \times q^3$$
$$54 = 2 \times q^3$$
$$q^3 = \frac{54}{2}$$
$$q^3 = 27$$
$$q = \sqrt[3]{27}$$
$$q = 3$$
La formule explicite permet d'écrire :

$v_2 = v_0 \times q^2$

$2 = v_0 \times 3^2$

$v_0 = \dfrac{2}{9}$

La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $\dfrac{2}{9}$ et de raison 3.

b. La suite (v_n) admet pour formule de récurrence :

$$v_0 = \frac{2}{9} \quad ; \quad v_{n+1} = 3 \cdot v_n$$

La suite (v_n) admet la formule explicite suivante :

$$v_n = \frac{2}{9} \times 3^n$$

Correction 4

1. a. Par définition de la suite (v_n), on a la relation :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 0{,}5 = \big(2 \cdot u_n + 0{,}5\big) + 0{,}5 = 2 \cdot u_n + 1$$
$$= 2 \cdot \big(u_n + 0{,}5\big) = 2 \cdot v_n$$

On vient d'établir que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont le premier terme vaut :

$$v_0 = u_0 + 0{,}5 = -2 + 0{,}5 = -1{,}5$$

b. L'expression explicite d'une suite de termes explicites donne :

$$v_n = -1{,}5 \times 2^n$$

2. La définition des termes de la suite (v_n) permet d'obtenir :

$v_n = u_n + 0{,}5$

$u_n = v_n - 0{,}5$

$u_n = -1{,}5 \times 2^n - 0{,}5$

3. De la comparaison $2 > 1$, on en déduit :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} 2^n = +\infty$$

On en déduit :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} u_n = \lim_{n \mapsto +\infty} -1{,}5 \times 2^n - 0{,}5 = -\infty$$

Correction 5

1. a. La définition de la suite (w_n) permet d'écrire la relation :

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \big(-3 \cdot u_n + 4 \cdot v_n\big) - \big(2 \cdot u_n - v_n\big)$$
$$= -3 \cdot u_n + 4 \cdot v_n - 2 \cdot u_n + v_n = -5 \cdot u_n + 5 \cdot v_n$$
$$= 5 \cdot \big(v_n - u_n\big) = 5 \cdot w_n$$

La suite (w_n) est géométrique de raison 5.

b. Le premier terme de la suite (w_n) a pour valeur :

$$w_0 = v_0 - u_0 = 4 - 5 = -1$$

La formule de l'expression des termes d'une suite géométrique permet d'écrire :

$$w_n = -1 \times 5^n = -5^n$$

2. a. Le premier terme de la suite (t_n) a pour valeur :

$$t_0 = 3 \cdot u_0 + v_0 = 3 \times 5 + 4 = 15 + 4 = 19$$

b. On a la relation :

$$t_{n+1} = 3 \cdot u_{n+1} + v_{n+1} = 3 \cdot \big(2 \cdot u_n - v_n\big) + \big(-3 \cdot u_n + 4 \cdot v_n\big)$$
$$= 6 \cdot u_n - 3 \cdot v_n - 3 \cdot u_n + 4 \cdot v_n = 3 \cdot u_n + v_n = t_n$$

3. D'après les question 1. et 2., on a :

$$\begin{cases} w_n = -5^n \\ t_n = 19 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v_n - u_n = -5^n \\ 3 \cdot u_n + v_n = 19 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -u_n + v_n = -5^n \\ 3 \cdot u_n + v_n = 19 \end{cases}$$

Par soustraction de ces deux lignes, on obtient :

$- u_n - 3 \cdot u_n = -5^n - 19$

$-4 \cdot u_n = -5^n - 19$

$u_n = \dfrac{-5^n - 19}{-4}$

$u_n = \dfrac{5^n + 19}{4}$

$u_n = \dfrac{5^n}{4} + \dfrac{19}{4}$

De la première équation, on obtient :

$v_n - u_n = -5^n$

$v_n = -5^n + u_n$

$v_n = -5^n + \dfrac{5^n}{4} + \dfrac{19}{4}$

$v_n = \dfrac{-4 \times 5^n}{4} + \dfrac{5^n}{4} + \dfrac{19}{4}$

$v_n = \dfrac{-3 \times 5^n}{4} + \dfrac{19}{4}$

4. De l'encadrement $5 > 1$, on a la limite : $\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} = +\infty$

On en déduit les limites :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} u_n = +\infty \quad ; \quad \lim_{n \mapsto +\infty} v_n = -\infty$$

Correction 6

a. On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} n^3 = +\infty \quad ; \quad \lim_{n \mapsto +\infty} 5^n = +\infty$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} n^3 \times 5^n = +\infty$$

b. On a les deux limites suivantes :

- $\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} n = +\infty$
- Puisque $0 \leqslant \dfrac{2}{7} < 1$, on a : $\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{2}{7}\right)^n = 0$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} n - \left(\frac{2}{7}\right)^n = +\infty$$

c. On a les deux limites suivantes :

- Puisque $0 \leqslant \dfrac{1}{3} < 1$, on a : $\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$
- Puisque $\dfrac{3}{2} > 1$, on a : $\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n = -\infty$$

d. On a la transformation algébrique suivante :

$$8^n - 3^n = 8^n \cdot \left(1 - \frac{3^n}{8^n}\right) = 8^n \cdot \left[1 - \left(\frac{3}{8}\right)^n\right]$$

On a les deux limites suivantes :

- Puisque $8 > 1$, on a : $\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} 8^n = +\infty$
- Puisque $0 \leqslant \dfrac{3}{8} < 1$, on a : $\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^n = 1$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} 8^n - 3^n = \lim_{n \mapsto +\infty} 8^n \cdot \left[1 - \left(\frac{3}{8}\right)^n\right] = +\infty$$

e. On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{5^n-2^n}{3^n+2^n}=\frac{5^n\cdot\left(1-\frac{2^n}{5^n}\right)}{3^n\cdot\left(1+\frac{2^n}{3^n}\right)}=\frac{5^n}{3^n}\cdot\frac{1-\frac{2^n}{5^n}}{1+\frac{2^n}{3^n}}$$
$$=\left(\frac{5}{3}\right)^n\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

On a les deux limites suivantes :

- Puisque $\frac{5}{3}>1$, on a : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n=+\infty$
- Puisque $0\leqslant\frac{2}{5}<1$ et $0\leqslant\frac{2}{3}<1$, on a :
  $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n=0$; $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$
  On en déduit la limite : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=1$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{5^n-2^n}{3^n+2^n}=\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}=+\infty$$

f. On a les transformations algébriques suivantes :

$$\left(\frac{31}{7}\right)^n\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^n=\left(\frac{31}{7}\times\frac{2}{8}\right)^n=\left(\frac{62}{56}\right)^n$$

De la comparaison $\frac{62}{56}>1$, on en déduit la limite suivante :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{31}{7}\right)^n\cdot\left(\frac{2}{8}\right)^n=\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{62}{56}\right)^n=+\infty$$

Correction 7

1. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :
   $\mathcal{P}_n$: "$u_n\geqslant 3$".

   A l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

   - **Initialisation :**
     On a : $u_0=3\geqslant 3$.
     Ainsi la propriété $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.
   - **Hérédité :**
     Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit réalisée pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
     $u_n\geqslant 3$
     Partons de la comparaison :
     $$u_n\geqslant 3$$
     $$\frac{3}{2}\cdot u_n\geqslant\frac{9}{2}$$
     $$\frac{3}{2}\cdot u_n-1\geqslant\frac{9}{2}-1$$
     $$u_{n+1}\geqslant\frac{7}{2}\geqslant 3$$
     On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   - **Conclusion :**
     La propriété $\mathcal{P}_n$ s'initialise au rang 0 et vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. Pour déterminer le sens de variation de la suite (u_n), étudions le signe de la différence suivante :
   $$u_{n+1}-u_n=\left(\frac{3}{2}\cdot u_n-1\right)-u_n=\frac{1}{2}\cdot u_n-1$$
   En utilisant la propriété $\mathcal{P}_n$ au rang n :
   $$\geqslant\frac{1}{2}\times 3-1\geqslant\frac{3}{2}-1\geqslant\frac{1}{2}\geqslant 0$$
   Ainsi, on vient de montrer que la suite est croissante.

Correction 8

1. Etudions la différence :
   $$2\cdot n^2\geqslant(n+1)^2$$
   $$2\cdot n^2-(n+1)^2\geqslant 0$$
   $$2\cdot n^2-(n^2+2\cdot n+1)\geqslant 0$$
   $$2\cdot n^2-n^2-2\cdot n-1\geqslant 0$$
   $$n^2-2\cdot n-1\geqslant 0$$
   $$n^2-2\cdot n+1-2\geqslant 0$$
   $$(n-1)^2-2\geqslant 0$$
   $$(n-1)^2\geqslant 2>0$$
   La fonction racine carrée est croissante :
   $$\sqrt{(n-1)^2}\geqslant\sqrt{2}$$
   $$n-1\geqslant\sqrt{2}$$
   $$n\geqslant\sqrt{2}+1$$
   On en déduit que la propriété est vraie pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3.

2. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :
   $\mathcal{P}_n$: "$2^n\geqslant n^2$"

   Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est réalisée pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4 :

   - **Initialisation :**
     On a : $2^4=16$; $4^2=16$
     On en déduit : $2^4\geqslant 4^2$
     La propriété $\mathcal{P}_4$ est vraie.
   - **Hérédité :**
     Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est pour un entier naturel n supérieur ou égal à 4. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
     $2^n\geqslant n^2$
     On a la comparaison :
     $$2^n\geqslant n^2$$
     $$2^n\geqslant n^2$$
     $$2\times 2^n\geqslant 2\cdot n^2$$
     $$2^{n+1}\geqslant 2\cdot n^2$$
     D'après l'hypothèse de récurrence :
     $$2^{n+1}\geqslant 2\cdot n^2\geqslant(n+1)^2$$
     $$2^{n+1}\geqslant(n+1)^2$$
     La propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est établie.
   - **Conclusion :**
     La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$

est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4.

Correction 9

On considère la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par :

$\mathcal{P}_n$: "$u_n = n^2 + n$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**

  On a les deux valeurs :

  $u_0 = 0 \quad ; \quad 0^2 + 0 = 0$

  On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**

  Supposons la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a pour hypothèse de récurrence :

  $\mathcal{P}_n$: "$u_n = n^2 + n$"

  D'après la définition de la suite (u_n), on a :

  $u_{n+1} = u_n + 2_n + 2$

  En utilisant l'hypothèse de récurrence :

  $$= (n^2 + n) + 2\cdot n + 2 = (n^2 + 2\cdot n + 1) + (n + 1)$$
  $$= (n+1)^2 + (n+1)$$

  On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**

  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Correction 10

Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel n par la relation :

$\mathcal{P}_n$: "$u_n = \dfrac{n}{n+1}$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- **Initialisation :**

  On a : $u_0 = 0 \quad ; \quad \dfrac{0}{0+1} = 0$

  On vient d'établir l'égalité $u_0 = \dfrac{0}{0+1}$: la propriété $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :**

  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ soit vérifiée pour un entier n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :

  $u_n = \dfrac{n}{n+1}$

  La définition de la suite (u_n) permet d'écrire la relation :

  $$u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$$

  En utilisant la propriété $\mathcal{P}_n$ au rang n :

  $$= \frac{1}{2 - \dfrac{n}{n+1}} = \frac{1}{\dfrac{2\cdot(n+1) - n}{n+1}}$$
  $$= \frac{1}{\dfrac{n+2}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2}$$

  On vient de montrer que $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{(n+1)+1}$: la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :**

  Le propriété $\mathcal{P}_n$ s'initialise au rang 0 et vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Correction 11

1. Voici les trois premiers termes de la suite (u_n) :

   - $u_0 = \dfrac{3\times0 + (-1)^0}{2\times0 - 1} = \dfrac{1}{-1} = -1$
   - $u_1 = \dfrac{3\times1 + (-1)^1}{2\times1 - 1} = \dfrac{3-1}{2-1} = \dfrac{2}{1} = 2$
   - $u_2 = \dfrac{3\times2 + (-1)^2}{2\times2 - 1} = \dfrac{6+1}{4-1} = \dfrac{7}{3}$

2. On a les encadrements suivants pour tout entier naturel n :

   $$-1 \leqslant \quad (-1)^n \quad \leqslant 1$$
   $$3n - 1 \leqslant 3n + (-1)^n \leqslant 3n + 1$$

   $2n - 1$ est positif pour tout entier naturel n non-nul :

   $$\frac{3n-1}{2n-1} \leqslant \frac{3n + (-1)^n}{2n-1} \leqslant \frac{3n+1}{2n-1}$$

3. On a la transformation algébrique suivante :

   $$\frac{3n-1}{2n-1} = \frac{n\cdot\left(3 - \dfrac{1}{n}\right)}{n\cdot\left(2 - \dfrac{1}{n}\right)} = \frac{3 - \dfrac{1}{n}}{2 - \dfrac{1}{n}}$$

   On a la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{3 - \frac{1}{n}}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{3}{2}$

   Par la même démarche, on en déduit la limite :

   $$\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{3n+1}{2n-1} = \frac{3}{2}$$

   De l'encadrement obtenu à la question 2. et des deux limites précédentes, le théorème des gendarmes permet d'obtenir la limite suivante : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \frac{3}{2}$

Correction 12

1. On a les transformations algébriques suivantes :

$u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}$

Le facteur $\sqrt{2n{+}1}{+}\sqrt{2n}$ est non-nul :

$$= \frac{\big(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}\big)\big(\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}\big)}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$$

$$= \frac{\big(\sqrt{2n+1}\big)^2-\big(\sqrt{2n}\big)^2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}} = \frac{(2n+1)-2n}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}}$$

2. Pour tout entier naturel n, on a la comparaison :

$$2n < 2n+1$$

La fonction racine carrée est strictemen croissante :

$$\sqrt{2n} < \sqrt{2n+1}$$

$$\sqrt{2n}+\sqrt{2n} < \sqrt{2n+1}+\sqrt{2n}$$

$$2{\cdot}\sqrt{2n} < \sqrt{2n}+\sqrt{2n+1}$$

n étant strictement positif :

$$0 < 2{\cdot}\sqrt{2n} < \sqrt{2n}+\sqrt{2n+1}$$

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{2{\cdot}\sqrt{2n}} > \frac{1}{\sqrt{2n}+\sqrt{2n+1}} > 0$$

$$\frac{1}{2{\cdot}\sqrt{2n}} > u_n > 0$$

De la limite $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{1}{2{\cdot}\sqrt{2n}}{=}0$ et du théorème des gendarmes, on en déduit la limite de la suite $\big(u_n\big)$:

$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$$

Correction 13

1. Voici les quatre premiers termes de cette suite :

- $u_0 = 1$
- $u_1 = \dfrac{1}{3}{\cdot}u_0 + 0 - 2 = \dfrac{1}{3}{\times}1 + 0 - 2 = \dfrac{1}{3} - 2 = -\dfrac{5}{3}$
- $u_2 = \dfrac{1}{3}{\cdot}u_1 + 1 - 2 = \dfrac{1}{3}{\cdot}\Big(-\dfrac{5}{3}\Big) + 1 - 2 = -\dfrac{5}{9} - 1 = -\dfrac{14}{9}$
- $u_3 = \dfrac{1}{3}{\cdot}u_2 + 1 - 2 = \dfrac{1}{3}{\cdot}\Big(-\dfrac{14}{9}\Big) + 2 - 2 = -\dfrac{14}{27}$

2. a. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie pour tout entier naturel par :

$\mathcal{P}_n$: "$u_n \geqslant 0$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel supérieur ou égal 4, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie.

- **Initialisation :**

  Le terme de rang 4 a pour valeur :

  $$u_4 = \frac{1}{3}{\cdot}u_3 + 3 - 2 = \frac{1}{3}{\cdot}\Big(-\frac{14}{27}\Big) + 1$$

  $$= -\frac{14}{81} + 1 = -\frac{14}{81} + \frac{81}{81} = \frac{67}{81} \geqslant 0$$

  La propriété $\mathcal{P}_4$ est vraie.

- **Hérédité :**

  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel quelconque ; c'est à dire qu'on a pour hypothèse par récurrence :

  $u_n \geqslant 0$

  Par définition des termes de la suite $\big(u_n\big)$:

  $$u_{n+1} = \frac{1}{3}{\cdot}u_n + n - 2$$

  Le rang n étant supérieur à 4 :

  $$\geqslant \frac{1}{3}{\cdot}u_n + 4 - 2$$

  $$\geqslant \frac{1}{3}{\cdot}u_n + 2$$

  Au rang n, on a $u_n \geqslant 0$

  $$\geqslant \frac{1}{3}{\times}0 + 2$$

  $$\geqslant 2 \geqslant 0$$

  La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang $(n{+}1)$.

- **Conclusion :**

  La propriété $\mathcal{P}_n$ est initialisée au rang 0 et elle vérifie la propriété d'hérédité. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, on vient d'établir que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

b. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 5 ; on en déduit que $(n{-}1)$ est supérieur ou égal à 4.

On a l'égalité :

$$u_n = \frac{1}{3}{\cdot}u_{n-1} + (n-1) - 2 = \frac{1}{3}{\cdot}u_{n-1} + n - 3$$

Puisque $n{-}1{\geqslant}1$, de la question précédente :

$$\geqslant \frac{1}{3}{\times}0 + n - 3$$

$$\geqslant n - 3$$

c. On a la limite : $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty} n{-}3{=}{+}\infty$

A l'aide de l'inégalité obtenue à la question précédente et par les théorèmes de comparaison des suites monotones, on a :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$$

