Trigonométrie et nombres complexes

Exercice 1

A l'aide des formules du cos et du sin des angles associés, exprimer en fonction de $\cos x$ ou de $\sin x$ les nombres suivants :

a. $\sin\left(3\pi+x\right)$ b. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{2}-x\right)$

c. $\cos\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)$ d. $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$

e. $\sin\left(\pi-x\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$

f. $3\cdot\sin\left(\pi+x\right)-2\cdot\sin\left(\pi-x\right)+4\cdot\sin\left(x-\pi\right)$

Exercice 2

1. En remarquant que : $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$

   Déterminer les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2. Déterminer les valeurs de : $\cos\dfrac{7\pi}{12}$; $\sin\dfrac{7\pi}{12}$

Exercice 3

Déterminer l'expression des dérivées des fonctions suivantes :

a. $f\colon x\longmapsto x^2+\cos x$ b. $g\colon x\longmapsto \sin(2x)$

c. $h\colon x\longmapsto \cos x\cdot\sin x$ d. $j\colon x\longmapsto \left(\sin x\right)^2$

Exercice 4

On considère les deux intégrales suivantes :

$$I=\int_0^{\pi}\left(\cos x\right)^2\mathrm{d}x \quad ; \quad J=\int_0^{\pi}\left(\sin x\right)^2\mathrm{d}x$$

1. Calculer : $I+J$; $I-J$.
2. En déduire les valeurs de I et de J.

Exercice 5

Sachant que $i^2=-1$, simplifier l'écriture des expressions suivantes :

a. i^2 b. i^3 c. i^4 d. i^5

c. i^{14} d. i^{100} e. i^{-1} f. i^{-3}

Exercice 6

Donner l'écriture algébrique des nombres complexes ci-dessous :

a. $z_1=\dfrac{1+i}{i}$ b. $z_2=\dfrac{1}{1-i}$ c. $z_3=\dfrac{-2+i}{2+i}$

Exercice 7

Dans $\mathbb{C}$, résoudre les équations du premier degré suivantes :

a. $3\cdot z+i\cdot z=0$ b. $z+2\cdot i\cdot z=i$

c. $z+2-i\cdot(z+1)=0$ d. $\dfrac{z-5}{z-i}=i$

Exercice 8

Sans effectuer de calcul, justifier que les nombres complexes z_1 et z_2 sont des nombres complexes conjugués.

a. $z_1=(1+i)\cdot(2-i)$; $z_2=(1-i)\cdot(2+i)$

b. $z_1=\dfrac{i-3}{2+2\cdot i}$; $z_2=\dfrac{-i-3}{2-2\cdot i}$

c. $z_1=(1-i)^5$; $z_2=(1+i)^5$

Exercice 9

On considère les deux nombres complexes z_1 et z_2 :

$$z_1=\frac{3-2i}{1+i} \quad ; \quad z_2=\frac{3+2i}{1-i}$$

1. Que peut-on dire des nombres complexes z_1 et z_2?
2. a. Déterminer l'écriture algébrique du nombre z_1.

   b. En déduire l'expression de z_1+z_2 et z_1-z_2.

Exercice 10

Résoudre les équations suivantes :

a. $z+\overline{z}=6$ b. $z+\overline{z}=i$

c. $z+2\cdot\overline{z}=8+i$ d. $i\cdot\overline{z}+2\cdot(z-5)=0$

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations du second degré suivantes :

a. $z^2-3\cdot z+4=0$ b. $z^2-4\cdot z+4=0$

c. $3\cdot z^2+3\cdot z+2=0$ d. $z^2-4\cdot z-1=0$

Exercice 12

1. Etablir l'égalité suivante pour tout nombre complexe z non nul :

$$\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\overline{\left(z^2-1\right)}=-\overline{z}^2\cdot\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$$

2. Pour tout nombre complexe z, on définit le nombre complexe z' par :

$$z'=\frac{(3+4\cdot i)\cdot z+5\cdot\overline{z}}{6}$$

   a. Pour tout nombre complexe z, établir l'égalité :

$$\frac{z'-z}{1+2\cdot i}=\frac{z+\overline{z}}{6}+i\cdot\frac{z-\overline{z}}{3}$$

   b. En déduire que le nombre $\dfrac{z'-z}{1+2\cdot i}$ est un nombre réel.

Exercice 13

Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes :

a. $z_1=2\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{4}-i\cdot\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

b. $z_2=-3\cdot\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$

c. $z_3=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\cdot\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$

d. $z_4=2\cdot\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\cdot\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

Exercice 14

On considère deux nombres complexes z et z' non-nuls de modules respectifs r et r' et d'arguments respectifs θ et θ'.

1. Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes z et z'.

2. Montrer que le nombre complexe $z \cdot z'$ est un nombre complexe de module $(r \cdot r')$ et d'argument $(\theta + \theta')$.

3. Montrer que le nombre complexe $\dfrac{z}{z'}$ est un nombre complexe de module $\dfrac{r}{r'}$ et d'argument $(\theta - \theta')$.

