Trigonométrie et nombres complexes

Correction 1

a. $\sin(3\pi+x) = \sin(\pi+x+2\pi) = \sin(\pi+x) = -\sin x$

b. $\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x+2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$

c. $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x$

d. $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos\left[\pi-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]$

$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = -\sin x$

e. $\sin(\pi-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin x + \sin x = 2\sin x$

f. $$\begin{aligned} &3\cdot\sin(\pi+x) - 2\cdot\sin(\pi-x) + 4\cdot\sin(x-\pi) \\ &= -3\cdot\sin x - 2\cdot\sin x + 4\cdot\sin\left[-(\pi-x)\right] \\ &= -3\cdot\sin x - 2\cdot\sin x - 4\cdot\sin(\pi-x) \\ &= -3\cdot\sin x - 2\cdot\sin x - 4\cdot\sin x = -9\cdot\sin x \end{aligned}$$

Correction 2

1. - $\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$
   $= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{4}$
   $= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$
   - $\sin\frac{\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$
   $= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}$
   $= \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}-1\right)$

2. Il fallait remarquer au préalable que : $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$
   - $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4}$
   $= \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{4}$
   $= \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot(1-\sqrt{3})$
   - $\sin\frac{7\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{3}$
   $= \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$
   $= \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)$

Correction 3

a. La fonction f admet pour dérivée :
$f'(x) = 2x + (-\sin x) = 2x - \sin x$

b. La fonction g est définie par la composée de la fonction u par la fonction sinus où :
$u(x) = 2x \quad ; \quad u'(x) = 2$

La formule de dérivation de la fonction sinus donne l'expression de la fonction g :
$g'(x) = u'(x)\cdot\cos\left[u(x)\right] = 2\cdot\cos(2x)$

c. La fonction h est définie par le produit des fonctions u et v où :
$u(x) = \cos x \quad ; \quad v(x) = \sin x$
qui admettent pour dérivée les fonctions :
$u'(x) = -\sin x \quad ; \quad v'(x) = \cos x$
La formule de dérivation d'un produit donne l'expression de la fonction h' :
$$\begin{aligned} h'(x) &= u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) \\ &= (-\sin x)\cdot\sin x + \cos x\cdot\cos x \\ &= -\left(\sin x\right)^2 + \left(\cos x\right)^2 = \left(\cos x\right)^2 - \left(\sin x\right)^2 \end{aligned}$$

d. La fonction j est définie par le carré de la fonction u où :
$u(x) = \sin x \quad ; \quad u'(x) = \cos x$
La formule de dérivation de la puissance d'exposant 2 d'une fonction permet d'obtenir l'expression de la fonction j' :
$j'(x) = 2\cdot u'(x)\cdot u(x) = 2\cdot\cos x\cdot\sin x$

Correction 4

1. Calculons la somme :
$$I+J = \int_0^\pi \left(\cos x\right)^2 dx + \int_0^\pi \left(\sin x\right)^2 dx$$
Par la propriété de linéarité de l'intégrale :
$$= \int_0^\pi \left(\cos x\right)^2 + \left(\sin x\right)^2 dx = \int_0^\pi 1\, dx = \left[x\right]_0^\pi$$
$$= \pi - 0 = \pi$$
Calculons la différence :
$$I-J = \int_0^\pi \left(\cos x\right)^2 dx - \int_0^\pi \left(\sin x\right)^2 dx$$
Par la propriété de linéarité de l'intégrale :
$$= \int_0^\pi \left(\cos x\right)^2 - \left(\sin x\right)^2 dx = \int_0^\pi \cos(2x)\, dx$$
$$= \int_0^\pi \frac{1}{2}\times 2\cdot\cos(2x)\, dx = \frac{1}{2}\cdot\int_0^\pi 2\cdot\cos(2x)\, dx$$
$$= \left[\sin(2x)\right]_0^\pi = \sin(2\pi) - \sin 0 = 0 - 0 = 0$$

2. Du second calcul intégral, on en déduit : $I = J$.

Du premier calcul intégral, on obtient la valeur de I :
$I+J = \pi$
$I+I = \pi$
$2\cdot I = \pi$
On en déduit :
$$I = J = \frac{\pi}{2}$$

Correction 5

a. $i^2 = -1$

b. $i^3 = i^2\times i = (-1)\times i = -i$

c. $i^4 = i^2\times i^2 = (-1)\times(-1) = 1$

d. $i^5 = i^4\times i = 1\times i = i$

e. $i^{14} = i^4\times i^4\times i^4\times i^2 = 1\times 1\times 1\times(-1) = -1$

f. $i^{100} = \left(i^4\right)^{25} = 1^{25} = 1$

g. $i^{-1} = \dfrac{1}{i} = \dfrac{i}{i\times i} = \dfrac{i}{-1} = -i$

h. $i^{-3} = \dfrac{1}{i^3} = \dfrac{i}{i^3\times i} = \dfrac{i}{i^4} = \dfrac{i}{1} = i$

Correction 6

a. $z_1 = \dfrac{1+i}{i} = \dfrac{(1+i){\cdot}i}{i^2} = \dfrac{i+i^2}{-1} = -\big[i+(-1)\big] = 1-i$

b. $z_2 = \dfrac{1}{1-i} = \dfrac{1{\cdot}(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{1+i}{1^2-i^2} = \dfrac{1+i}{1-(-1)}$
$= \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}{\cdot}i$

c. $z_3 = \dfrac{-2+i}{2+i} = \dfrac{(-2+i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \dfrac{-4+2i+2i-i^2}{2^2-i^2}$
$= \dfrac{-4+4i-(-1)}{4-(-1)} = \dfrac{-4+4i+1}{4+1} = \dfrac{-3+4i}{5}$
$= -\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}{\cdot}i$

Correction 7

a. On a la factorisation suivante :

$$3{\cdot}z+i{\cdot}z = 0$$
$$z{\cdot}\big(3+i\big) = 0$$

Or, un produit de nombre complexe est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul ; le complexe $3+i$ n'est pas nul.

On en déduit que cette équation admet une unique solution :
$\mathcal{S} = \{0\}$

b. Notons $(a+i{\cdot}b)$ l'écriture algébrique du nombre complexe z ; ainsi, cette équation se transforme en :

$$z+2{\cdot}i{\cdot}z = i$$
$$(a+i{\cdot}b)+2{\cdot}i{\cdot}(a+i{\cdot}b) = i$$
$$a+i{\cdot}b+2{\cdot}i{\cdot}a+2{\cdot}i^2{\cdot}b-i = 0$$
$$\big(a-2{\cdot}b\big)+i{\cdot}\big(2{\cdot}a+b-1\big) = 0$$

Or, un nombre complexe est nul si, et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nuls ; on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a-2{\cdot}b = 0 \\ 2{\cdot}a+b-1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a-2{\cdot}b = 0 \\ 2{\cdot}a+b = 1 \end{cases}$$

On en déduit les valeurs suivantes : $a = \dfrac{2}{5}$; $b = \dfrac{1}{5}$

Cette équation possède une unique solution :
$\mathcal{S}=\Big\{\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5}{\cdot}i\Big\}$

c. En notant $(a+i{\cdot}b)$ l'écriture algébrique du nombre complexe z, on a :

$$z+2-i{\cdot}(z+1) = 0$$
$$(a+i{\cdot}b)+2-i{\cdot}\big[(a+i{\cdot}b)+1\big] = 0$$
$$a+i{\cdot}b+2-i{\cdot}a-i^2{\cdot}b-i = 0$$
$$a+i{\cdot}b+2-i{\cdot}a+b-i = 0$$
$$\big(a+b+2\big)+i{\cdot}(b-a-1) = 0$$

On obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a+b+2 = 0 \\ -a+b-1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a+b = -2 \\ -a+b = 1 \end{cases}$$

On en déduit l'unique couple solution de ce système :

$$a = -\dfrac{3}{2} \quad ; \quad b = -\dfrac{1}{2}$$

Ainsi, l'équation complexe admet pour unique solution :
$\mathcal{S}=\Big\{-\dfrac{3}{2}-i{\cdot}\dfrac{1}{2}\Big\}$

d. L'équation peut s'écrire :

$$\dfrac{z-5}{z-i} = i$$
$$z-5 = i{\cdot}(z-i)$$
$$z-5 = i{\cdot}z-i^2$$
$$z-5 = i{\cdot}z+1$$
$$z-i{\cdot}z-6 = 0$$

Tout nombre complexe z admet une écriture algébrique $(a+i{\cdot}b)$; on a alors :

$$(a+i{\cdot}b)-i{\cdot}(a+i{\cdot}b)-6 = 0$$
$$a+i{\cdot}b-i{\cdot}a-i^2{\cdot}b-6 = 0$$
$$a+i{\cdot}b-i{\cdot}a+b-6 = 0$$
$$\big(a+b-6\big)+i{\cdot}\big(b-a\big) = 0$$

Ainsi, les nombres a et b vérifient le système suivant :

$$\begin{cases} a+b-6 = 0 \\ -a+b = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a+b = 6 \\ -a+b = 0 \end{cases}$$

On en déduit que cette équation admet pour unique solution :
$\mathcal{S}=\big\{3+3{\cdot}i\big\}$

Correction 8

a. $\overline{z_1} = \overline{(1+i){\cdot}(2-i)}$

Le conjugué d'un produit est égal au produit des conjugués :

$$= \overline{(1+i)}{\cdot}\overline{(2-i)} = (1-i){\cdot}(2+i) = z_2$$

b. $\overline{z_1} = \overline{\dfrac{i-3}{2+2{\cdot}i}}$

Le conjugué d'un quotient est égal au quotient des conjugués

$$= \dfrac{\overline{i-3}}{\overline{2+2{\cdot}i}} = \dfrac{-i-3}{2-2{\cdot}i} = z_2$$

c. $\overline{z_1} = \overline{(1-i)^5}$

Le conjugué d'une puissance est égale à la puissance d'un conjugué :

$$= \big(\overline{1-i}\big)^5 = \big(1+i\big)^5$$

Correction 9

1. On a les manipulations algébriques suivantes :

$$z_2 = \dfrac{3+2{\cdot}i}{1-i} = \dfrac{\overline{3-2{\cdot}i}}{\overline{1-i}} = \overline{\Big(\dfrac{3-2{\cdot}i}{1-i}\Big)} = \overline{z_1}$$

On en déduit que les deux nombres z_1 et z_2 sont conjugués.

2. a. On a les transformations algébriques suivantes :

$$z_1 = \dfrac{3-2{\cdot}i}{1+i} = \dfrac{(3-2{\cdot}i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \dfrac{3-3{\cdot}i-2{\cdot}i+2{\cdot}i^2}{1^2-i^2}$$
$$= \dfrac{3-5{\cdot}i-2}{1+1} = \dfrac{1-5{\cdot}i}{2} = \dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2}{\cdot}i$$

b. Les nombres z_1 et z_2 étant deux nombres complexes conjugués, on en déduit :

- $z_1+z_2=z_1+\overline{z_1}=2{\cdot}Re(z_1)=2\times\dfrac{1}{2}=1$
- $z_1-z_2=z_1-\overline{z_1}=2{\cdot}Im(z_1)=2\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)=-5$

Correction 10

On notera tout nombre complexe z sous son écriture algébrique :
$z=a+i{\cdot}b$ où $a,b\in\mathbb{R}$.

a. On a les équations équivalentes suivantes :

$$\begin{aligned}z+\overline{z}&=6\\(a+i{\cdot}b)+(a-i{\cdot}b)&=6\\2a+0{\cdot}i&=6\\a+0{\cdot}b{\cdot}i&=3+0{\cdot}i\end{aligned}$$

On en déduit le système : $\begin{cases}a=3\\0{\cdot}b=0\end{cases}$

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, leur partie réelle et leur imaginaire sont égales.

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
$\{3+b{\cdot}i \mid b\in\mathbb{R}\}$

Cet ensemble est l'ensemble des nombres complexes ayant 3 pour partie réelle.

b. On a :

$$\begin{aligned}z+\overline{z}&=i\\(a+i{\cdot}b)+(a-i{\cdot}b)&=i\\2a&=i\\2a+0{\cdot}i&=0+i\end{aligned}$$

Il est impossible que ces deux nombres complexes aient la même partie réelle et la même partie imaginaire.

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\varnothing$

c. On a :

$$\begin{aligned}z+2{\cdot}\overline{z}&=8+i\\(a+i{\cdot}b)+2{\cdot}(a-i{\cdot}b)&=8+i\\a+i{\cdot}b+2{\cdot}a-2{\cdot}i{\cdot}b&=8+i\\3{\cdot}a-i{\cdot}b&=8+i\end{aligned}$$

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement, si leur partie réelle et leur partie imaginaire sont égales.

On obtient le système suivant : $\begin{cases}3{\cdot}a=8\\-b=1\end{cases}$

Ainsi, cette équation a pour unique solution le nombre complexe dont l'écriture algébrique est :
$z=\dfrac{8}{3}-i$

d. En utilisant l'écriture algébrique du nombre complexe z, on obtient :

$$\begin{aligned}i{\cdot}\overline{z}+2{\cdot}(z-5)&=0\\i{\cdot}\overline{a+i{\cdot}b}+2{\cdot}\big[(a+i{\cdot}b)-5\big]&=0\\i{\cdot}(a-i{\cdot}b)+2{\cdot}a+2{\cdot}i{\cdot}b-10&=0\\i{\cdot}a-i^2{\cdot}b+2{\cdot}a+2{\cdot}i{\cdot}b-10&=0\\i{\cdot}a+b+2{\cdot}a+2{\cdot}i{\cdot}b-10&=0\\(b+2{\cdot}a-10)+i{\cdot}(a+2{\cdot}b)&=0\end{aligned}$$

Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, leur partie réelle et leur partie partie imaginaire sont égales ; on obtient le système :

$$\begin{cases}2a+b-10=0\\a+2b=0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}2a+b=10\\a+2b=0\end{cases}$$

On en déduit que ce système admet un unique complexe pour solution :
$\mathcal{S}=\left\{\dfrac{20}{3}-\dfrac{10}{3}{\cdot}i\right\}$

Correction 11

a. Etudions le polynôme $z^2-3{\cdot}z+4$. Il admet pour discriminant :
$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=(-3)^2-4{\cdot}1{\cdot}4=9-16=-7$

Le discriminant Δ étant strictement négatif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$z_1=\frac{-b-i{\cdot}\sqrt{-\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-(-3)-i{\cdot}\sqrt{7}}{2}=\frac{3-i{\cdot}\sqrt{7}}{2}=\frac{3}{2}-i{\cdot}\frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$z_2=\frac{-b+i{\cdot}\sqrt{-\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-(-3)+i{\cdot}\sqrt{7}}{2}=\frac{3+i{\cdot}\sqrt{7}}{2}=\frac{3}{2}+i{\cdot}\frac{\sqrt{7}}{2}$$

On a : $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{3}{2}-i{\cdot}\dfrac{\sqrt{7}}{2}\ ;\ \dfrac{3}{2}+i{\cdot}\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right\}$

b. Le polynôme $z^2-4{\cdot}z+4$ admet la factorisation :
$z^2-4{\cdot}z+4=(z-2)^2$

On en déduit que l'équation proposée possède une unique solution : 2.

c. Le polynôme $3{\cdot}z^2+3{\cdot}z+2$ admet pour discriminant :
$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=9-4\times3\times2=9-24=-15$

Le discriminant étant strictement négatif, ce polynôme admet deux racines complexes dont les expressions sont :

$$z_1=\frac{-b-i{\cdot}\sqrt{-\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-3-i{\cdot}\sqrt{15}}{6}=-\frac{1}{2}-i{\cdot}\frac{\sqrt{15}}{6}$$

$$z_2=\frac{-b+i{\cdot}\sqrt{-\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-3+i{\cdot}\sqrt{15}}{6}=-\frac{1}{2}+i{\cdot}\frac{\sqrt{15}}{6}$$

On a : $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{1}{2}-i{\cdot}\dfrac{\sqrt{15}}{6}\ ;\ -\dfrac{1}{2}+i{\cdot}\dfrac{\sqrt{15}}{6}\right\}$

d. Le polynôme $z^2-4{\cdot}z-1$ admet pour discriminant :
$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=(-4)^2-4\times1\times(-1)=16+4=20$
On a la simplification : $\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=2\sqrt{5}$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines réelles suivantes :

$$z_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-(-4)-2\sqrt{5}}{2}=\frac{4-2\sqrt{5}}{2}=2-\sqrt{5}$$

$$z_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-(-4)+2\sqrt{5}}{2}=\frac{4+2\sqrt{5}}{2}=2+\sqrt{5}$$

On a : $\mathcal{S}=\left\{2-\sqrt{5}\ ;\ 2+\sqrt{5}\right\}$

Correction 12

1. On a les transformations algébriques suivantes :

$$\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\cdot\overline{\left(z^2-1\right)} = \left(\frac{1}{z^2}-1\right)\cdot\overline{z^2\cdot\left(1-\frac{1}{z^2}\right)}$$
$$= \left(\frac{1}{z^2}-1\right)\cdot\overline{z^2}\cdot\overline{\left(1-\frac{1}{z^2}\right)} = \overline{z^2}\cdot\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\cdot\left[\overline{-\left(\frac{1}{z^2}-1\right)}\right]$$
$$= \overline{z}^2\cdot\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\cdot\left[-\overline{\left(\frac{1}{z^2}-1\right)}\right] = -\overline{z}^2\cdot\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\cdot\overline{\left(\frac{1}{z^2}-1\right)}$$
$$= -\overline{z}^2\cdot\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2$$

2. a. On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{z'-z}{1+2\cdot i} = \frac{6\cdot(z'-z)}{6\cdot(1+2\cdot i)} = \frac{6\cdot z'-6\cdot z}{6+12\cdot i}$$
$$= \frac{(3+4\cdot i)\cdot z+5\cdot\overline{z}-6\cdot z}{6+12\cdot i} = \frac{(-3+4\cdot i)\cdot z+5\cdot\overline{z}}{6+12\cdot i}$$
$$= \frac{\left[(-3+4\cdot i)\cdot z+5\cdot\overline{z}\right]\cdot(6-12\cdot i)}{(6+12\cdot i)(6-12\cdot i)}$$
$$= \frac{(-3+4\cdot i)\cdot(6-12\cdot i)\cdot z+5\cdot(6-12\cdot i)\cdot\overline{z}}{6^2-(12\cdot i)^2}$$
$$= \frac{(-18+36\cdot i+24\cdot i-48\cdot i^2)\cdot z+(30-60\cdot i)\cdot\overline{z}}{36+144}$$
$$= \frac{(-18+60\cdot i+48)\cdot z+(30-60\cdot i)\cdot\overline{z}}{36+144}$$
$$= \frac{(30+60\cdot i)\cdot z+(30-60\cdot i)\cdot\overline{z}}{180}$$
$$= \frac{(1+2\cdot i)\cdot z+(1-2\cdot i)\cdot\overline{z}}{6} = \frac{z+2\cdot i\cdot z+\overline{z}-2\cdot i\cdot\overline{z}}{6}$$
$$= \frac{(z+\overline{z})+2\cdot i\cdot(z-\overline{z})}{6} = \frac{z+\overline{z}}{6}+\frac{2\cdot i\cdot(z-\overline{z})}{6}$$
$$= \frac{z+\overline{z}}{6}+i\cdot\frac{z-\overline{z}}{3}$$

b. D'après les propriétés des nombres conjugués, on a :

- $z+\overline{z}$ est un nombre réel pour tout $z\in\mathbb{Z}$;
- $z-\overline{z}$ est un nombre imaginaire pur pour tout $z\in\mathbb{Z}$.

Ainsi, les deux termes :

$$\frac{z+\overline{z}}{6} \quad ; \quad i\cdot\frac{z-\overline{z}}{3}$$

sont deux nombres réels.

On en déduit que le nombre complexe $\dfrac{z'-z}{1+2\cdot i}$ est un nombre réel.

Correction 13

a. $z_1 = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\cdot\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$$= 2\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Cette expression est de la forme $r\cdot(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$ où $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Cette expression est son écriture algébrique.

Donc, z_1 est le nombre complexe de module 2 et d'argument $-\dfrac{\pi}{4}$.

b. $z_2 = -3\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 3\cdot\left(-\cos\frac{2\pi}{3}-i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$$= 3\cdot\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2\pi}{3}+\pi\right)\right]$$
$$= 3\cdot\left[\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right] = 3\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

Cette expression est de la forme $r\cdot(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$ où $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Cette expression est son écriture algébrique.

Le nombre complexe z_2 est le nombre complexe de module 3 et d'argume $-\dfrac{\pi}{3}$.

c. $z_3 = \cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 1\cdot\left[\cos\frac{\pi}{6}+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$$= 1\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

Cette expression est de la forme $r\cdot(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$ où $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Cette expression est son écriture algébrique.

Le nombre complexe z_3 est le nombre complexe de module 1 et d'argument $-\dfrac{\pi}{6}$.

d. $z_4 = 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2\cdot\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$$= 2\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\cdot\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Cette expression est de la forme $r\cdot(\cos\theta+i\cdot\sin\theta)$ où $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$. Cette expression est son écriture algébrique.

Le nombre complexe z_4 est le nombre complexe de module 2 et d'argument $\dfrac{\pi}{4}$.

Correction 14

1. Les nombres complexes z et z' admettent pour écriture trigonométrique :

$$z = r\cdot\left(\cos\theta+i\cdot\sin\theta\right) \quad ; \quad z' = r'\cdot\left(\cos\theta'+i\cdot\sin\theta'\right)$$

2. On a les deux formules :

- $\cos\left(\theta+\theta'\right) = \cos\theta\cdot\cos\theta'-\sin\theta\cdot\sin\theta'$
- $\sin\left(\theta+\theta'\right) = \cos\theta\cdot\sin\theta'+\sin\theta\cdot\cos\theta'$

Etudions le produit suivant :

$$z\cdot z' = \left[r\cdot\left(\cos\theta+i\cdot\sin\theta\right)\right]\left[r'\cdot\left(\cos\theta'+i\cdot\sin\theta'\right)\right]$$
$$= (r\cdot r')\cdot\left(\cos\theta+i\cdot\sin\theta\right)\left(\cos\theta'+i\cdot\sin\theta'\right)$$
$$= (r\cdot r')\cdot\left(\cos\theta\cdot\cos\theta'+i\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta'+i\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta'+i^2\cdot\sin\theta\cdot\sin\theta'\right)$$
$$= (r\cdot r')\cdot\left[\left(\cos\theta\cdot\cos\theta'-\sin\theta\cdot\sin\theta'\right)+i\cdot\left(\cos\theta\cdot\sin\theta'+\sin\theta\cdot\cos\theta'\right)\right.$$

En utilisant les formules précédemment citées :

$$= \left(r\cdot r'\right)\cdot\left[\cos(\theta+\theta')+i\cdot\sin(\theta+\theta')\right] \qquad \text{où } r\cdot r'>0$$

Le coefficient $r\cdot r'$ étant strictement positif, cette expression est on écriture trigonométrique.

On en déduit que le nombre complexe $z\cdot z'$ a pour module $r\cdot r'$ et pour argument $\left(\theta+\theta'\right)$.

3. On a les deux formules :

- $\left(\cos\theta\right)^2+\left(\sin\theta\right)^2 = 1$
- $\cos\left(\theta-\theta'\right) = \cos\theta\cdot\cos\theta'+\sin\theta\cdot\sin\theta'$
- $\sin\left(\theta-\theta'\right) = \sin\theta\cdot\cos\theta'-\cos\theta\cdot\sin\theta'$

Etudions le quotient suivant :

$$\frac{z}{z'} = \frac{r\cdot\big(\cos\theta + i\cdot\sin\theta\big)}{r'\cdot\big(\cos\theta' + i\cdot\sin\theta'\big)} = \frac{r}{r'}\cdot\frac{\cos\theta + i\cdot\sin\theta}{\cos\theta' + i\cdot\sin\theta'}$$
$$= \frac{r}{r'}\cdot\frac{\big(\cos\theta + i\cdot\sin\theta\big)\big(\cos\theta' - i\cdot\sin\theta'\big)}{\big(\cos\theta' + i\cdot\sin\theta'\big)\big(\cos\theta' - i\cdot\sin\theta'\big)}$$
$$= \frac{r}{r'}\cdot\frac{\cos\theta\cdot\cos\theta' - i\cdot\cos\theta\cdot\sin\theta' + i\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta' - i^2\cdot\sin\theta\cdot\sin\theta'}{\big(\cos\theta'\big)^2 - \big(i\cdot\sin\theta'\big)^2}$$
$$= \frac{r}{r'}\cdot\frac{\big(\cos\theta\cdot\cos\theta' + \sin\theta\cdot\sin\theta'\big) + i\cdot\big(\sin\theta\cdot\cos\theta' - \cos\theta\cdot\sin\theta'\big)}{\big(\cos\theta'\big)^2 + \big(\sin\theta'\big)^2}$$
$$= \frac{r}{r'}\cdot\frac{\cos\big(\theta - \theta'\big) + i\cdot\sin\big(\theta - \theta'\big)}{1}$$
$$= \frac{r}{r'}\cdot\Big[\cos\big(\theta-\theta'\big) + i\cdot\sin\big(\theta-\theta'\big)\Big] \qquad \text{où } \frac{r}{r'} > 0$$

Le coefficient $\frac{r}{r'}$ étant strictement positif, cette expression est son écriture trigonométrique.

On en déduit que le nombre complexe $\frac{z}{z'}$ a pour module $\frac{r}{r'}$ et pour argument $\big(\theta-\theta'\big)$.

