Intégration

Exercice 1

Donner une primitive de chacune des fonctions ci-dessous :

a. $f(x)=2{\cdot}x+1$ b. $g(x)=1-\dfrac{3}{\sqrt{x}}$

c. $h(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ d. $j(x)=e^{2\cdot x}$

Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\displaystyle\int_{-3}^{2} x+1\,\mathrm{d}x$ b. $\displaystyle\int_{0}^{5} (2x-5)^2\,\mathrm{d}x$

c. $\displaystyle\int_{-3}^{1} (1-x)^3\,\mathrm{d}x$ d. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{x}{(2{\cdot}x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$

e. $\displaystyle\int_{4}^{6} \frac{2{\cdot}x}{x^2-3}\,\mathrm{d}x$ f. $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

Exercice 3

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :
$g(x)=x^2{\cdot}e^{-x}$

1. Soit H la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par :
$H(x)=-\left(x^2+2{\cdot}x\right){\cdot}e^{-x}$
Calculer la dérivée H' de la fonction H.

2. En déduire une primitive sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ de la fonction g.

3. En déduire la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$

Exercice 4

On considère les deux intégrales suivantes :
$I=\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$; $J=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$

1. Justifier l'égalité : $I+J=1$.

2. a. Déterminer la valeur de l'intégrale I.
   b. En déduire la valeur de l'intégrale J.

Exercice 5

Soit f la fonction définie et dérivale sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ telle que : $f(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$

Soit la suite (I_n) définie pour tout entier naturel n par :
$I_n=\displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$

On ne cherchera pas à calculer la valeur exacte de I_n en fonction de n.

1. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

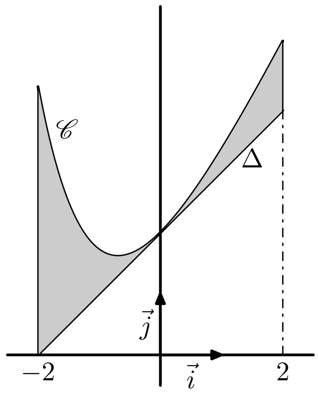
2. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$:
$e^x-x\geqslant\dfrac{e^x}{2}$
   a. Montrer que, pour tout entier naturel n :
$I_n\leqslant\displaystyle\int_0^n 2{\cdot}x{\cdot}e^{-x}\,\mathrm{d}x$
   b. Soit H la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ telle que : $H(x)=(-x-1){\cdot}e^{-x}$.
Déterminer la fonction dérivée H' de la fonction H.
   c. En déduire que, pour tout entier naturel n : $I_n\leqslant 2$.

3. Montrer que la suite (I_n) est convergente. On ne demande pas la valeur de sa limite.

Exercice 6

Dans un repère $(O\,;I\,;J)$, on considère les deux courbes $\mathscr{C}$ et Δ où :

- la courbe $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie par :
$f(x)=e^{-x}+2x+1$
- la droite Δ a pour équation réduite : $y=x+2$



On considère le domaine grisée représenté ci-dessus et défini par :

- situé entre les droites d'équations $x=-2$ et $x=2$;
- situé entre la courbe $\mathscr{C}$ et la droite Δ.

1. a. Etudier les variations de la fonction de la fonction f définie par : $g(x)=f(x)-(x+2)$.
   b. Justifier que la droite Δ est située sous la courbe $\mathscr{C}$

2. Déterminer l'aire du domaine grisé.

