Intégration

Correction 1

a. Considérons la fonction F définie par :
$F(x) = x^2 + x$
qui admet pour dérivée :
$F'(x) = 2{\cdot}x + 1 = f(x)$

On en déduit que F est une primitive de f.

b. Considérons la fonction G définie par :
$G(x) = x - 6{\cdot}\sqrt{x}$
qui admet pour dérivée :
$$F'(x) = 1 - 6{\cdot}\frac{1}{2{\cdot}\sqrt{x}} = 1 - \frac{3}{\cdot\sqrt{x}} = g(x)$$
On en déduit que G est une primitive de g.

c. Considérons la fonction H définie par :
$$H(x) = \ln x - \frac{1}{x}$$
qui admet pour dérivée :
$$H'(x) = \frac{1}{x} - \Big(-\frac{1}{x^2}\Big) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = h(x)$$
On en déduit que H est une primitive de h.

d. Considérons la fonction J définie par :
$$J(x) = \frac{1}{2}{\cdot}e^{2x}$$
qui admet pour dérivée :
$$J'(x) = \frac{1}{2}{\cdot}\big(2{\cdot}e^{2x}\big) = e^{2x}$$
On en déduit que J est une primitive de j.

Correction 2

a. La fonction f définit par :
$f(x) = x + 1$
qui admet pour primitive la fonction F dont l'expression est :
$$F(x) = \frac{1}{2}{\cdot}x^2 + x$$
Ainsi, on a le calcul intégral suivant :
$$\int_{-3}^{2} x + 1\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{2}{\cdot}x^2 + x\Big]_{-3}^{2}$$
$$= \Big(\frac{1}{2}\times 2^2 + 2\Big) - \Big[\frac{1}{2}\times(-3)^2 + (-3)\Big]$$
$$= \frac{4}{2} + 2 - \frac{9}{2} + 3 = \frac{5}{2}$$

b. Considérons la fonction u est définie par :
$u(x) = 2{\cdot}x - 5 \quad ; \quad u'(x) = 2$
Considérons la fonction g définie par :
$g(x) = (2x-5)^2$
qui admet pour expression :
$$= \frac{1}{2}\times 2{\cdot}(2x-5)^2 = \frac{1}{2}\times u'(x){\cdot}\big[u(x)\big]^2$$
La fonction g admet pour primitive la fonction G définie par :
$$G(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\big[u(x)\big]^3 = \frac{1}{6}{\cdot}(2x-5)^3$$
On a le calcul intégral suivant :
$$\int_0^5 \big(2{\cdot}x - 5\big)\,\mathrm{d}x = \Big[\frac{1}{6}{\cdot}\big(2{\cdot}x-5\big)^3\Big]_0^5$$
$$= \frac{1}{6}{\cdot}\big(2\times5-5\big)^3 - \frac{1}{6}{\cdot}\big(2\times0-5\big)^3$$
$$= \frac{1}{6}\times5^3 + \frac{1}{6}\times5^3 = \frac{2}{6}\times125 = \frac{125}{3}$$

c. Considérons la fonction u est définie par :
$u(x) = 1 - x \quad ; \quad u'(x) = -1$
Considérons la fonction h définie par :
$$h(x) = (1-x)^3 = -1\times(-1){\cdot}(1-x)^3$$
$$= -1\times u'(x){\cdot}\big[u(x)\big]^3$$
La fonction h admet pour primitive la fonction H définie par :
$$H(x) = -1\times\frac{1}{4}{\cdot}\big[u(x)\big]^4 = -\frac{1}{4}{\cdot}(1-x)^4$$
On a le calcul intégral suivant :
$$\int_{-3}^{1} \big(1-x\big)^3\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{4}{\cdot}\big(1-x\big)^4\Big]_{-3}^{1}$$
$$= -\frac{1}{4}{\cdot}\big(1-1\big)^4 - \Big[-\frac{1}{4}{\cdot}\big[1-(-3)\big]^4\Big]$$
$$= -\frac{1}{4}\times0^4 + \frac{1}{4}\times4^4 = 4^3 = 64$$

d. Soit u la fonction définie par :
$u(x) = 2{\cdot}x^2 + 1 \quad ; \quad u'(x) = 4{\cdot}x$
Considérons la fonction j définie par :
$$j(x) = \frac{x}{(2x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\times\frac{4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{1}{4}\times\frac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2}$$
La fonction j admet pour primitive la fonction J définie par :
$$J(x) = \frac{1}{4}\times\Big(-\frac{1}{2x^2+1}\Big) = -\frac{1}{4{\cdot}(2x^2+1)}$$
Ainsi, on peut écrire :
$$\int_1^4 \frac{x}{\big(2{\cdot}x^2+1\big)^2}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{4{\cdot}(2{\cdot}x^2+1)}\Big]_1^4$$
$$= -\frac{1}{4{\cdot}(2\times4^2+1)} - \Big[-\frac{1}{4{\cdot}(2\times1^2+1)}\Big] = -\frac{1}{4\times33} + \frac{1}{4\times3}$$
$$= \frac{-1+1\times11}{4\times33} = \frac{10}{132}$$

e. Notons u la fonction définie par :
$u(x) = x^2 - 3 \quad ; \quad u'(x) = 2{\cdot}x$
Considérons la fonction k définie par :
$$k(x) = \frac{2{\cdot}x}{x^2-3} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$
La fonction k admet pour primitive la fonction K définie par :
$$K(x) = \ln\big[u(x)\big] = \ln(x^2-3)$$
Ainsi, on le calcul intégral suivant :
$$\int_4^6 \frac{2{\cdot}x}{x^2-3}\,\mathrm{d}x = \big[\ln(x^2-3)\big]_4^6 = \ln(6^2-3) - \ln(4^2-3)$$
$$= \ln(33) - \ln(13) = \ln\Big(\frac{33}{13}\Big)$$

f. Considérons la fonction L définie par :
$$L(x) = -\frac{1}{x} - \ln x$$
qui admet pour dérivée :

$$L'(x) = -\Big(-\frac{1}{x^2}\Big) - \frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$$

Ainsi, on a le calcul intégral suivant :

$$\int_1^3 \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\frac{1}{x} - \ln x\Big]_1^3$$

$$= \Big(-\frac{1}{3} - \ln 3\Big) - \Big(\frac{1}{1} - \ln 1\Big)$$

$$= -\frac{1}{3} - \ln 3 - \frac{1}{1} + \ln 1 = \frac{2}{3} - \ln 3$$

Correction 3

1. L'expression de la fonction H est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v où :
$u(x) = -\big(x^2 + 2x\big) \quad ; \quad v(x) = e^{-x}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = -2x - 2 \quad ; \quad v'(x) = -e^{-x}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction dérivée H' :

$$H'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$
$$= (-2x-2)\cdot e^{-x} + \big[-(x^2+2x)\big]\cdot\big(-e^{-x}\big)$$
$$= (-2x-2)\cdot e^{-x} + (x^2+2x)\cdot e^{-x}$$
$$= \big[(-2x-2) + (x^2+2x)\big]\cdot e^{-x} = (x^2-2)\cdot e^{-x}$$
$$= x^2\cdot e^{-x} - 2\cdot e^{-x}$$

2. Pour obtenir la primitive de la fonction g, utilisons les résultats de la question précédente et notamment l'expression de la fonction H'.
Considérons la fonction G définie par la relation :
$G(x) = H(x) - 2\cdot e^{-x}$

La fonction G admet pour dérivée la fonction G' dont l'expression est donnée par :

$$G'(x) = H'(x) - 2\cdot\big(-e^{-x}\big) = H'(x) + 2\cdot e^{-x}$$
$$= x^2\cdot e^{-x} - 2\cdot e^{-x} + 2\cdot e^{-x} = x^2\cdot e^{-x} = g(x)$$

La fonction G, ainsi définie, est une primitive de la fonction g.

3. On a le calcul intégral suivant :

$$\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \big[G(x)\big]_0^1 = \big[-(x^2+2x)\cdot e^{-x} - 2\cdot e^{-x}\big]_0^1$$
$$= -(1^2+2\times1)\cdot e^{-1} - 2\cdot e^{-1} - \big[-(0^2+2\times0)\cdot e^{-0} - 2\cdot e^{-0}\big]$$
$$= -3\cdot e^{-1} - 2\cdot e^{-1} - \big(0\times1 - 2\times1\big) = -5\cdot e^{-1} + 2$$

Correction 4

1. Effectuons le calcul de cette somme :

$$I + J = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$= \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1} + \frac{1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^x+1}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = \big[x\big]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

2. a. Considérons la fonction u définie par :
$u(x) = e^x + 1 \quad ; \quad u'(x) = e^x$
Ainsi, on obtient le calcul intégral suivant :

$$I = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln\big[u(x)\big]\Big]_0^1$$
$$= \big[\ln(e^x+1)\big]_0^1 = \ln(e^1+1) - \ln(e^0+1)$$
$$= \ln\big(e+1\big) - \ln 2 = \ln\frac{e+1}{2}$$

b. On en déduit la valeur de l'intégrale J :
$I + J = 1$

$$J = 1 - I = 1 - \ln\frac{e+1}{2}$$

Correction 5

1. Etudions la différence suivante :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_n^0 f(x)\,\mathrm{d}x$$

D'après la relation de Chasles :

$$= \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Or, on a : $\begin{cases} n \leqslant n+1 \\ \text{Pour tout } x\in\big[n\,;n+1\big[, \text{ on a : } \quad f(x)\geqslant 0\end{cases}$

Par positivité de l'intégrale, on en déduit :

$$\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$$
$$I_{n+1} - I_n \geqslant 0$$
$$I_{n+1} \geqslant I_n$$

Ainsi, la suite $\big(I_n\big)$ est une suite croissante.

2. a. Utilisons la comparaison donnée dans l'énoncé pour tout $x\in\big[0\,;+\infty\big[$:

$$e^x - x \geqslant \frac{e^x}{2}$$
$$e^x - x \geqslant \frac{e^x}{2} > 0$$

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\frac{1}{e^x - x} \leqslant \frac{2}{e^x}$$

Le nombre x étant positif :

$$\frac{x}{e^x - x} \leqslant 2x\cdot e^{-x}$$

Grâce à la positivité de l'intégrale :

$$\int_0^n \frac{x}{e^x-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^n 2x\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x$$
$$I_n \leqslant \int_0^n 2x\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

b. L'expression de la fonction H est donnée sous la forme d'un produit des fonctions u et v définies par :
$u(x) = -x - 1 \quad ; \quad v(x) = e^{-x}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x) = -1 \quad ; \quad v'(x) = -e^{-x}$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction H' dérivée de la fonction H :

$$H'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$
$$= (-1)\cdot e^{-x} + \big(-1-x\big)\cdot\big(-e^{-x}\big) = -e^{-x} + \big(1+x\big)\cdot e^{-x}$$
$$= \big[-1 + \big(1+x\big)\big]\cdot e^{-x} = x\cdot e^{-x}$$

c. La primitive de la fonction $x \longmapsto 2x \cdot e^{-x}$ est la fonction $2 \cdot H$. Ainsi, on a :

$$I_n = \int_0^n 2 \cdot x \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = \big[2 \cdot H(x)\big]_0^n$$
$$= 2 \cdot \big[(-n-1) \cdot e^{-n}\big] - 2 \cdot \big[(-0-1) \cdot e^{-0}\big] = 2 \cdot \big[(-n-1) \cdot e^{-n}\big] + 2$$

Or, pour tout entier naturel, on a :

$$n \geqslant 0$$
$$-n \leqslant 0$$
$$-n-1 \leqslant -1 < 0$$
$$-n-1 \leqslant 0$$

La fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$:

$$\big(-n-1\big) \cdot e^{-n} \leqslant 0$$
$$2 \cdot \big(-n-1\big) \cdot e^{-n} \leqslant 0$$
$$2 \cdot \big(-n-1\big) \cdot e^{-n} + 2 \leqslant 2$$
$$I_n \leqslant 2$$

3. La suite $\big(I_n\big)$ est croissante et majorée par 2.
D'après le théorème de convergence des suites monotones, on en déduit que la suite $\big(I_n\big)$ est convergente.

Correction 6

1. a. La fonction g admet pour dérivée :
$$g'(x) = \big(-e^{-x} + 2\big) - 1 = -e^{-x} + 1$$

Résolvons l'inéquation suivante :

$$g'(x) \geqslant 0$$
$$-e^{-x} + 1 \geqslant 0$$
$$-e^{-x} \geqslant -1$$
$$e^{-x} \leqslant 1$$

La fonction logarithme népérien est croissante :

$$\ln\big(e^{-x}\big) \leqslant \ln 1$$
$$-x \leqslant 0$$
$$x \geqslant 0$$

On a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

On déduit que la fonction g est :

- décroissante sur $\big]-\infty\,;0\big]$;
- croissante sur $\big[0\,;+\infty\big[$;

b. On a la valeur :
$$g(0) = \big(e^{-0} + 2 \times 0 + 1\big) - \big(0+2\big) = 2 - 2 = 0$$

On en déduit que la fonction g admet pour minimum la valeur 0 :

$$g(x) \geqslant 0$$
$$f(x) - \big(x+2\big) \geqslant 0$$
$$f(x) \geqslant x + 2$$

La courbe $\mathscr{C}$ se situe au dessus de la droite Δ.

2. La courbe $\mathscr{C}$ étant au dessus de la droite Δ, le calcul de l'aire grisée s'effectue par :

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^{2} f(x) - \big(x+2\big)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{2} \big(e^{-x} + 2 \cdot x + 1\big) - \big(x+2\big)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-2}^{2} e^{-x} + x - 1\,\mathrm{d}x = \Big[-e^{-x} + \frac{1}{2} \cdot x^2 - x\Big]_{-1}^{1}$$
$$= \Big(-e^{-2} + \frac{1}{2} \times 2^2 - 2\Big) - \Big[-e^{-(-2)} + \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 - (-2)\Big]$$
$$= -e^{-2} + 2 - 2 + e^2 - 2 - 2 = e^2 - \frac{1}{e^2} - 4$$