Exponentielles et logarithmes

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

a. $\exp(3)\cdot\exp(5)$ b. $\exp(-2)\cdot\exp(4)$

c. $\dfrac{1}{\exp(-5)}$ d. $\big[\exp(5)\big]^3$

Exercice 2

Recopier les identités ci-dessous en complétant correctement les pointillés :

a. $e^x+e^{-x}=e^x\cdot\big(\ldots+\ldots\big)$ b. $\dfrac{e^x}{x^2}=\left(\dfrac{e^{\cdots}}{\cdots}\right)^2$

c. $1+e^{-x}=\dfrac{\ldots+\ldots}{e^x}$ d. $\dfrac{1+e^x}{e^{2x}}=\ldots+\ldots$

e. $\dfrac{e^{3x}-e^x}{e^{3x}+e^{2x}}=\dfrac{1-\ldots}{1+\ldots}$ f. $e^{16x}=\big(e^{\cdots}\big)^2$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

a. $\exp(x)=e$ b. $\exp(-x)=1$

c. $\exp(2x-1)=e$ d. $e^{x^2+x}=1$

e. $e^x-e^{-x}=0$ f. $e^{x^2+5}=\big(e^{x+2}\big)^2$

Exercice 4

Déterminer les valeurs des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}e^{-x+1}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}e^{2x+1}$ c. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}e^{-x^2+1}$

d. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}e^{\frac{1}{x}}$ e. $\lim\limits_{x\mapsto0^-}e^{\frac{1}{x}}$ f. $\lim\limits_{x\mapsto0^-}e^{-\frac{1}{x}}$

Exercice 5

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}e^{x^2}\cdot e^{-x}$ b. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}e^x\cdot\big(x^2-x+1\big)$

c. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{e^x+1}{e^{-x}-1}$ d. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\dfrac{e^{-3x}}{x^2+1}$

e. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}e^{-x}+3x+1$ f. $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}e^{-2x}-e^{-x}$

Exercice 6

Déterminer l'expression des fonctions dérivées suivantes :

a. $f(x)=e^{-x}$ b. $g(x)=x\cdot e^x$

c. $h(x)=e^{x^2+x}$ d. $j(x)=\dfrac{1}{1-e^x}$

Exercice 7

Déterminer l'expression des fonctions dérivées de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x)=x\cdot e^{x+1}$ b. $g(x)=e^{x^2+1}$

c. $h(x)=\big(x^2+1\big)\cdot e^{3x+1}$ d. $j(x)=\dfrac{e^{x+1}}{2\cdot x+1}$

e. $k(x)=\dfrac{1-e^{-2x}}{e^x}$ f. $\ell(x)=\dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{2x}}$

Exercice 8

Soit g la fonction définie sur $\big[0\,;+\infty\big[$ par :
$g(x)=x\cdot\big(e^x-e\big)+e-2$

1. Soit g' la fonction dérivée de la fonction g. Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de $\big[0\,;+\infty\big[$.
Vérifier que la fonction dérivée seconde g'' est définie sur $\big[0\,+\infty\big[$ par :
$g''(x)=(2+x)e^x$

2. En déduire les variations de la fonction g' sur $\big[0\,;+\infty\big[$.

3. Etablir que l'équation $g'(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$.
Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

4. En déduire les variations de la fonction g sur $\big[0\,;+\infty\big[$.

Exercice 9

Exprimer chacun des nombres suivants à l'aide de $\ln 2$:

a. $\ln(4)$ b. $\ln\big(2\sqrt{2}\big)$ c. $\ln(6)-\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$

d. $\ln\big(2\cdot e^2\big)$ e. $\ln\left(\dfrac{2}{e^3}\right)$ f. $\ln\big(\sqrt{e^5}\big)$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\big[0\,;+\infty\big[$ par : $f(x)=x+e^{-x}$

On considère la suite $\big(u_n\big)_{n\geqslant1}$ à termes positifs définie par :
$u_1=0\quad;\quad u_{n+1}=f(u_n)=u_n+e^{-u_n}$

On admet que pour tout nombre x positif, on a la relation :
$\ln(1+x)\leqslant x$

1. En déduire que, pour tout entier naturel n non-nul :
$\ln(n+1)\leqslant\ln(n)+\dfrac{1}{n}$

2. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :
$f\big[\ln(n)\big]=\ln(n)+\dfrac{1}{n}$

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non-nul :
$\ln n\leqslant u_n$

4. En déduire la limite de la suite $\big(u_n\big)_{n\geqslant1}$.

Exercice 11

Pour chaque question, préciser l'ensemble de résolution de l'équation puis la résoudre :

a. $\ln(5x+1)=\ln(x-1)$ b. $2\cdot\ln(3-x)=\ln(2)$

c. $\ln(3x+1)=5$ d. $3\cdot e^{2x-1}=2$

e. $\big(\ln x\big)^2-\ln x-2=0$ f. $e^{2x}+4\cdot e^x-1=0$

Exercice 12

1. On considère la suite $\big(u_n\big)$ géométrique de premier terme 5 et de raison $\dfrac{2}{3}$.

a. Quelle est la limite de la suite $\big(u_n\big)$?

b. Déterminer le plus petit entier naturel n réalisant l'inégalité :

$u_n < 0{,}01$

2. On considère la suite (v_n) géométrique de premier terme 2 et de raison $\frac{4}{5}$. On note S_n la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite (v_n) :

$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

a. Justifier que la suite (S_n) est croissante.

b. Exprimer la somme S_n en fonction du rang n.

c. Justifier qu'à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite (S_n) appartiennent à l'intervalle $[9{,}9\,;10]$.

d. Déterminer le plus petit entier naturel n vérifiant $S_n \in [9{,}9\,;10]$.

Exercice 13

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} 2\cdot \ln x + x$

b. $\lim\limits_{x \mapsto -3^+} \ln(x+3) - 3\cdot x$

c. $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} \ln(x) - \frac{1}{x}$

d. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \ln\left(e^x+1\right)$

e. $\lim\limits_{x \mapsto 0^+} e^{-2\cdot \ln x+1}$

f. $\lim\limits_{x \mapsto +\infty} \ln\left(x^2-x\right)$

Exercice 14

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = x\cdot \ln x$

b. $g(x) = \dfrac{\ln x + 1}{x^2+1}$

c. $h(x) = \ln\left(\sqrt{1-x}\right)$

d. $j(x) = \ln\left(e^x-1\right)$

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$

1. Soit g la fonction définie sur $[1\,;+\infty[$ par :

$g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$

Montrer que la fonction g est positive sur $[1\,;+\infty[$.

2. a. Montrer que, pour tout x de $[1\,;+\infty[$:

$f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

b. En déduire le sens de variation de f sur $[1\,;+\infty[$.

