Exponentielles et logarithmes

Correction 1

a. $\exp(3)\cdot\exp(5) = \exp(3{+}5) = \exp(8)$

b. $\exp(-2)\cdot\exp(4) = \exp(-2{+}4) = \exp(2)$

c. $\dfrac{1}{\exp(-5)} = \exp\big[-(-5)\big] = \exp(5)$

d. $\big[\exp(5)\big]^3 = \exp(3{\times}5) = \exp(15)$

Correction 2

a. $e^x+e^{-x} = e^x\cdot\Big(\dfrac{e^x}{e^x}+\dfrac{e^{-x}}{e^x}\Big) = e^x\cdot\big(1+e^{-2x}\big)$

b. $\dfrac{e^x}{x^2} = \dfrac{e^{2\cdot\frac{x}{2}}}{x^2} = \dfrac{\big(e^{\frac{x}{2}}\big)^2}{x^2} = \Big(\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{x}\Big)^2$

c. $1+e^{-x} = \dfrac{e^x\cdot\big(1+e^{-x}\big)}{e^x} = \dfrac{e^x+e^0}{e^x} = \dfrac{e^x+1}{e^x}$

d. $\dfrac{1+e^x}{e^{2x}} = \dfrac{1}{e^{2x}}+\dfrac{e^x}{e^{2x}} = e^{-2x}+e^{-x}$

e. $\dfrac{e^{3x}-e^x}{e^{3x}+e^{2x}} = \dfrac{e^{3x}\cdot\big(1-e^{-2x}\big)}{e^{3x}\cdot\big(1+e^{-x}\big)} = \dfrac{1-e^{-2x}}{1+e^{-x}}$

f. $e^{16x} = e^{2\times 8x} = \big(e^{8x}\big)^2$

Correction 3

a.
$$\exp(x) = e$$
$$\exp(x) = \exp(1)$$

Par la stricte croissance de la fonction exponentielle, on en déduit qu'il existe une unique solution à cette équation :
$\mathcal{S} = \{1\}$

b.
$$\exp(-x) = 1$$
$$\exp(-x) = e^0$$

Par la stricte croissance de la fonction exponentielle :
$\exp(-x) = \exp(0) \implies -x = 0$

On en déduit qu'il existe une unique solution à cette équation :
$\mathcal{S} = \{0\}$

c.
$$\exp(2x{-}1) = e$$
$$\exp(2x{-}1) = \exp(1)$$

Par la stricte croissance de la fonction exponentielle :
$$2x-1 = 1$$
$$x = 1$$

L'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S} = \{1\}$

d.
$$e^{x^2+x} = 1$$
$$e^{x^2+x} = \exp(0)$$

Par la stricte croissance de la fonction exponentielle :
$$x^2+x = 0$$
$$x\cdot\big(x+1\big) = 0$$

Ainsi, l'ensemble des solutions possèdent deux éléments :
$\mathcal{S} = \{-1\,;0\}$

e.
$$e^x-e^{-x} = 0$$
$$e^x\Big(1-\frac{e^{-x}}{e^x}\Big) = 0$$
$$e^x\big(1-e^{-2\cdot x}\big) = 0$$

La fonction exponentielle est non nulle sur $\mathbb{R}$:
$$1-e^{-2\cdot x} = 0$$
$$e^{-2\cdot x} = 1$$
$$e^{-2\cdot x} = e^0$$

Par la stricte croissante de la fonction exponentielle :
$$-2x = 0$$
$$x = 0$$

On a : $\mathcal{S} = \{0\}$

f.
$$e^{x^2+5} = \big(e^{x+2}\big)^2$$
$$e^{x^2+5} = e^{2\cdot(x+2)}$$
$$e^{x^2+5} = e^{2x+4}$$

Par la stricte croissance de la fonction exponentielle :
$$x^2+5 = 2x+4$$
$$x^2-2x+1 = 0$$
$$(x-1)^2 = 0$$

On a : $\mathcal{S} = \{1\}$

Correction 4

a. On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} -x+1 = -\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto-\infty} e^x = 0$
Les formules de composition des limites permet d'obtenir :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{-x+1} = 0$

b. On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} 2x+1 = -\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto-\infty} e^x = 0$
La composition des limites permet d'obtenir :
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} e^{2x+1} = 0$

c. On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} -x^2+1 = -\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto-\infty} e^x = 0$
L'étude de la limite de la composée de fonctions permet d'obtenir :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{-x^2+1} = 0$

d. On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{1}{x} = 0^+ \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto0^+} e^x = 1$
On en déduit la limite suivante : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$

e. On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto-\infty} e^x = 0$
On obtient la limite suivante : $\lim\limits_{x\mapsto0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0$

f. On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto0^-} -\dfrac{1}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^x = +\infty$
Ainsi, on a la limite suivante : $\lim\limits_{x\mapsto0^-} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$

Correction 5

a. On a la transformation algébrique suivante :
$e^{x^2}\cdot e^{-x}=e^{x^2-x}=e^{x\cdot(x-1)}$

On a la limite suivante : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x\cdot(x-1)=+\infty$

On en déduit la valeur de la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{x^2}\cdot e^{-x}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{x\cdot(x-1)}=+\infty$

b. On a la transformation algébrique suivante :
$e^x\cdot\big(x^2-x+1\big)=x^2\cdot e^x-x\cdot e^x+e^x$
D'après le cours, on a les limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^2\cdot e^x=0\quad;\quad\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x\cdot e^x=0\quad;\quad\lim\limits_{x\mapsto-\infty} e^x=0$

On en déduit la limite : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} e^x\cdot\big(x^2-x+1\big)=0$

c. On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^x+1=+\infty\quad;\quad\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^{-x}-1=-1$
On en déduit la valeur de la limite :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{e^x+1}{e^{-x}-1}=-\infty$

d. On a la transformation algébrique suivante :
$$\frac{e^{-3x}}{x^2+1}=\frac{e^{-3x}}{x^2\cdot\Big(1+\dfrac{1}{x^2}\Big)}=\frac{e^{-3x}}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}$$
$$=9\cdot\frac{e^{-3x}}{(-3x)^2}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}$$

Posons le changement de variables $X=-3x$:

- lorsque x tend vers $-\infty$, alors X tend vers $+\infty$;
- $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\dfrac{e^{-3x}}{\big(-3x\big)^2}=\lim\limits_{X\mapsto+\infty}\dfrac{e^X}{X^2}=+\infty$

On a également la limite : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}=1$

On en déduit la valeur suivante de la limite :
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\dfrac{e^{-3x}}{x^2+1}=+\infty$

e. Pour $x\neq0$, on a les transformations algébriques :
$$e^{-x}+3x+1=x\cdot\Big(\frac{e^{-x}}{x}+3\Big)+1=x\cdot\Big(-\frac{e^{-x}}{-x}+3\Big)+1$$
Posons le changement de variables $X=-x$:

- lorsque x tend vers $-\infty$, alors X tend vers $+\infty$;
- $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}\dfrac{e^{-x}}{-x}=\lim\limits_{X\mapsto+\infty}\dfrac{e^X}{X}=+\infty$

Ainsi, on a la limite : $\lim -\dfrac{e^{-x}}{-x}+3=-\infty$

On en déduit la limite :
$$\lim_{x\mapsto-\infty} e^{-x}+3x+1=\lim_{x\mapsto-\infty} x\cdot\Big(-\frac{e^{-x}}{-x}+3\Big)+1=+\infty$$

f. On a la transformation algébrique suivante :
$e^{-2x}-e^{-x}=e^{-2x}\cdot\big(1-e^x\big)$
On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} e^{-2x}=+\infty\quad;\quad\lim\limits_{x\mapsto-\infty} 1-e^x=1$
On obtient ainsi la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} e^{-2x}-e^{-x}=+\infty$

Correction 6

a. La fonction f peut être vue comme la composée de la fonction u par la fonction exponentielle où :
$u(x)=-x\quad;\quad u'(x)=-1$

La formule de dérivation de la fonction exponentielle peremt d'obtenir l'expression de la fonction dérivée f' de la fonction f :
$f(x)=u'(x)\cdot e^{u(x)}=-e^{-x}$

b. La fonction g est définie par le produit des fonctions u et v où :
$u(x)=x\quad;\quad v(x)=e^x$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x)=1\quad;\quad v'(x)=e^x$

La formule de dérivation d'une produit permet d'obtenir l'expression de la dérivée de la fonction g :
$$g'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x$$
$$=e^x+x\cdot e^x=e^x\cdot(1+x)$$

c. La fonction h est définie comme la composée de la fonction u par la fonction exponentielle où :
$u(x)=x^2+x\quad;\quad u'(x)=2x+1$

La formule de dérivation de la composée d'une fonction par la fonction exponentielle permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :
$h'(x)=u'(x)\cdot e^{u(x)}=(2x+1)\cdot e^{x^2+x}$

d. La fonction j est définie comme l'inverse de la fonction u définie par :
$u(x)=1-e^x\quad;\quad u(x)=-e^x$

La formule de dérivation de l'inverse permet d'obtenir l'expression de la dérivée de la fonction j :
$$j'(x)=-\frac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2}=-\frac{-e^x}{\big(1-e^x\big)^2}=\frac{e^x}{\big(1-e^x\big)^2}$$

Correction 7

a. La fonction f est définie par le produit des fonctions u et v où :
$u(x)=x\quad;\quad v(x)=e^{x+1}$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x)=1\quad;\quad v'(x)=e^{x+1}$

La formule de dérivation d'un produit l'expression de la fonction f' :
$$f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)=1\cdot e^{x+1}+x\cdot e^{x+1}$$
$$=(x+1)\cdot e^{x+1}$$

b. La fonction g est la composée de la fonction u par la fonction exponentielle où :
$u(x)=x^2+1\quad;\quad u'(x)=2x$

La formule de dérivation de la fonction exponentielle donne l'expression de la fonction g' :
$g'(x)=u'(x)\cdot e^{u(x)}=2x\cdot e^{x^2+1}$

c. La fonction est définie par le produit $u\cdot v$ où :
$u(x)=x^2+1\quad;\quad v(x)=e^{3x+1}$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x)=2x\quad;\quad v'(x)=3\cdot e^{3x+1}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la dérivée de la fonction h :
$$h'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$
$$=2x\cdot e^{3x+1}+\big(x^2+1\big)\cdot3\cdot e^{3x+1}$$
$$=\big(2x+3x^2+3\big)\cdot e^{3x+1}=\big(3x^2+2x+3\big)\cdot e^{3x+1}$$

d. La fonction j est définie par le quotient des fonctions u et v où :

$u(x) = e^{x+1} \quad ; \quad v(x) = 2x+1$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = e^{x+1} \quad ; \quad v'(x) = 2$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'écrire :

$$j'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{e^{x+1}\cdot(2x+1) - e^{x+1}\times 2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{e^{x+1}\cdot(2x+1-2)}{(2x+1)^2} = \frac{e^{x+1}\cdot(2x-1)}{(2x+1)^2}$$

e. La fonction k est définie par le quotient des fonctions u et v où :
$u(x) = 1 - e^{-2x} \quad ; \quad v(x) = e^x$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = 2e^{-2x} \quad ; \quad v'(x) = e^x$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'écrire l'expression de la fonction k' dérivée de la fonction k :

$$k'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2} = \frac{\big(2e^{-2x}\big)\cdot e^x - \big(1-e^{-2x}\big)\cdot e^x}{\big(e^x\big)^2}$$

$$= \frac{2e^{-2x+x} - e^x + e^{-2x+x}}{e^{2x}} = \frac{2e^{-x} - e^x + e^{-x}}{e^{2x}}$$

$$= \frac{3e^{-x} - e^x}{e^{2x}}$$

f. La fonction ℓ est définie par le quotient des deux fonctions u et v définies par :
$u(x) = 1 - e^{-2x} \quad ; \quad v(x) = 1 + e^{2x}$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = 2e^{-2x} \quad ; \quad v'(x) = 2e^{2x}$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir :

$$\ell'(x) = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$= \frac{\big(2\cdot e^{-2x}\big)\cdot\big(1+e^{2x}\big) - \big(1-e^{-2x}\big)\cdot\big(2\cdot e^{2x}\big)}{\big(1+e^{2x}\big)^2}$$

$$= \frac{2\cdot\big(e^{-2x} + e^{2x-2x} - e^{2x} + e^{-2x+2x}\big)}{\big(1+e^{2x}\big)^2}$$

$$= 2\cdot\frac{e^{-2x} + e^0 - e^{2x} + e^0}{\big(1+e^{2x}\big)^2} = 2\cdot\frac{e^{-2x} - e^{2x} + 2}{\big(1+e^{2x}\big)^2}$$

Correction 8

1.
- L'expression de la fonction g peut s'écrire sous la forme :
$g(x) = x\cdot\big(e^x - e\big) + e - 2 = u(x)\cdot v(x) + e - 2$
où les fonctions u et v définies par :
$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = e^x - e$
et admettent pour dérivée :
$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = e^x$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir la fonction dérivée g' :
$g'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) + 0$
$= 1\cdot(e^x - e) + x\cdot e^x = x\cdot e^x + e^x - e$
- L'expression de la fonction g' peut s'exprimer sous la forme :
$g'(x) = x\cdot e^x + e^x - e = u(x)\cdot v(x) + e^x - e$
où les deux fonctions u et v définies par :
$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = e^x$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = e^x$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir la dérivée seconde g'' :
$g''(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x) + e^x - 0$
$= 1\cdot e^x + x\cdot e^x + e^x = 2\cdot e^x + x\cdot e^x = (2+x)\cdot e^x$

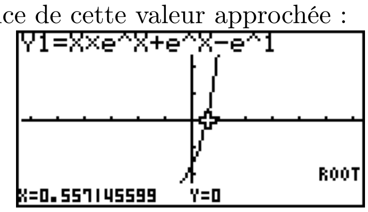
2. Sur $\big[0\,;+\infty\big[$, les facteurs $2+x$ et e^x sont positifs. Donc la fonction g'' est positive sur $\big[0\,;+\infty\big[$.
On en déduit que la fonction g' est strictement croissante sur $\big[0\,;+\infty\big[$.

3. On a les deux informations suivantes sur la fonction g' :
- $g'(0) = 0\times e^0 + e^0 - e = 1 - e < 0$
- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g'(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} x\cdot e^x + e^x - e = +\infty$

De plus :
- la fonction g' est continue sur $\big[0\,;+\infty\big[$
- la fonction g' est strictement croissante sur $\big[0\,;+\infty\big[$
- 0 est compris entre les limites des bornes de l'intervalle $\big[0\,;+\infty\big[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, on déduit l'existence d'un unique nombre α appartenant à $\big[0\,;+\infty\big[$ tel que :
$g'(\alpha) = 0$.

La capture d'écran ci-dessous montre la recherche à la calculatrice de cette valeur approchée :



On a la valeur approchée : $\alpha \simeq 0{,}6$

4. Ainsi, la fonction g' s'annulant en α et étant strictement croissante, elle admet le tableau de signe suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

On en déduit les variations de la fonction g :
- Sur $\big[0\,;\alpha\big]$, la fonction g est strictement décroissante ;
- Sur $\big[\alpha\,;+\infty\big[$, la fonction g es strictement croissante.

Correction 9

a. $\ln(4) = \ln(2\times 2) = \ln 2 + \ln 2 = 2\cdot\ln 2$

b. $\ln\big(2\sqrt{2}\big) = \ln 2 + \ln\sqrt{2} = \ln 2 + \frac{1}{2}\cdot\ln 2 = \frac{3}{2}\cdot\ln 2$

c. $\ln(6) - \ln\Big(\frac{3}{2}\Big) = \ln(2\times 3) - \big(\ln 3 - \ln 2\big)$
$= \big(\ln 2 + \ln 3\big) - \ln 3 + \ln 2 = 2\cdot\ln 2$

d. $\ln\big(2\cdot e^2\big) = \ln 2 + \ln\big(e^2\big) = \ln 2 + 2 = 2 + \ln 2$

e. $\ln\Big(\frac{2}{e^3}\Big) = \ln 2 - \ln\big(e^3\big) = \ln 2 - 3 = -3 + \ln 2$

f. $\ln\big(\sqrt{e^5}\big) = \frac{1}{2}\cdot\ln\big(e^5\big) = \frac{1}{2}\times 5\cdot\ln e = \frac{1}{2}\times 5\times 1 = \frac{5}{2}$

Correction 10

1. Soit n un entier naturel non-nul, on a les transformations algébriques suivantes :

$$\ln(n+1) = \ln\left(n\cdot\frac{n+1}{n}\right) = \ln n + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
$$= \ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

D'après l'inégalité précédemment établie :

$$\leqslant \ln n + \frac{1}{n}$$

2. On a :

$$f\big[\ln(n)\big] = \ln(n) + e^{-\ln(n)} = \ln(n) + \frac{1}{e^{\ln(n)}} = \ln(n) + \frac{1}{n}$$

3. Considérons la propriété $\mathcal{P}_n$ définie, pour tout entier naturel n, par la relation :

$\mathcal{P}_n$: "$\ln(n) \leqslant u_n$"

Montrons, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n non-nul :

- **Initialisation :**
  Pour $n=1$, on a : $\ln(1)=0$; $u_1=0$
  On vient d'établr l'inégalité : $\ln 1 \leqslant u_1$
  La propriété est établie au rang $\mathcal{P}_1$ est vraie.
- **Hérédité :**
  Supposons que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel n quelconque. C'est à dire qu'on a l'hypothèse de récurrence :
  $\ln(n) \leqslant u_n$
  De la comparaison, on a :
  $$\ln n \leqslant u_n$$
  D'après **A**, la fonction f est strictement croissante :
  $$f\big[\ln(n)\big] \leqslant f\big(u_n\big)$$
  $$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant u_{n+1}$$
  D'après la question 1. :
  $$\ln(n+1) \leqslant \ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant u_{n+1}$$
  $$\ln(n+1) \leqslant u_{n+1}$$
  On vient de montrer que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.
- **Conclusion :**
  La propriété $\mathcal{P}_n$ a été initialisée au rang 1 et elle vérifie la propriété d'hérédité. On vient de montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel non-nul.

4. On a la limite : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \ln(n) = +\infty$

Par la comparaison, $\ln(n)\leqslant u_n$ vérifiée pour tout entier naturel non-nul, on en déduit la limite suivante :

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} u_n = +\infty$

Correction 11

a. Le membre de gauche est définit sur $\left]-\frac{1}{5}\,;+\infty\right[$ et le membre de droite est défini sur $]1\,;+\infty[$.
Ainsi, cette équation est définie sur $]1\,;+\infty[$.

On a la résolution suivante :

$$\ln(5x+1) = \ln(x-1)$$
$$e^{\ln(5x+1)} = e^{\ln(x-1)}$$
$$5x+1 = x-1$$
$$4x = -2$$
$$x = -\frac{1}{2}$$

Cette valeur n'appartient pas à l'ensemble de définition de cette équation, on en déduit :
$\mathcal{S} = \varnothing$

b. Cette équation est définie sur l'intervalle $]-\infty\,;3[$

On a les transformations suivantes :

$$2\cdot\ln(3-x) = \ln(2)$$
$$e^{2\cdot\ln(3-x)} = e^{\ln(2)}$$
$$\left[e^{\ln(3-x)}\right]^2 = 2$$
$$(3-x)^2 = 2$$
$$9-6x+x^2 = 2$$
$$x^2-6x+7 = 0$$

Le polynôme du membre de gauche a pour discriminant :

$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-6)^2 - 4{\times}1{\times}7 = 8$

On a la simplification suviante : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Le discriminant étant strictement positif, on a déduit les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6-2\sqrt{2}}{2} = 3-\sqrt{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{6+2\sqrt{2}}{2} = 3+\sqrt{2}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de cette équation est :
$\mathcal{S} = \big\{3-\sqrt{2}\big\}$

c. Cette équation est définie sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$:

De l'égalité, on a :

$$\ln(3x+1) = 5$$
$$e^{\ln(3x+1)} = e^5$$
$$3x+1 = e^5$$
$$x = \frac{e^5-1}{3}$$

Cette équation a pour unique solution : $x=\dfrac{e^5-1}{3}$

d. Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$. On a :

$$3{\cdot}e^{2x-1} = 2$$
$$e^{2x-1} = \frac{2}{3}$$
$$\ln\left(e^{2x-1}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$2x-1 = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$$
$$2x = \ln\left(\frac{2}{3}\right)+1$$
$$x = \frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)+1}{2}$$

e. Cette équation est définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Posons le changement de variable $X=\ln x$:

$$\big(\ln x\big)^2 - \ln x - 2 = 0$$
$$X^2 - X - 2 = 0$$

Le polynôme du second degré du membre de gauche a pour discriminant :

$\Delta = b^2 - 4{\cdot}a{\cdot}c = (-1)^2 - 4{\times}1{\times}(-2) = 1+8 = 9$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{9}=3$

Cette équation admet les deux racines suivantes :

$$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-3}{2}=-1 \qquad X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+3}{2}=2$$

Cherchons les valeurs de x vérifiant le changement de variable :

$$X_1=-1 \quad \ln x_1=-1 \quad e^{\ln x_1}=e^{-1} \quad x_1=e^{-1}$$

$$X_2=2 \quad \ln(x_2)=2 \quad e^{\ln(x_2)}=e^2 \quad x_2=e^2$$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S}=\{e^{-1}\,;e^2\}$

f. Cette équation est définie sur $\mathbb{R}$.

Posons le changement de variable : $X=e^x$

L''équation devient :

$$e^{2x}+4{\cdot}e^x-1=0$$
$$\left(e^x\right)^2+4{\cdot}e^x-1=0$$
$$X^2+4{\cdot}X-1=0$$

Le membre de droite est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta=b^2-4{\cdot}a{\cdot}c=4^2-4\times1\times(-1)=16+4=20$$

On a la simplification suivante : $\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=2\sqrt{5}$

Le discriminant étant strictement positif, on en déduit les deux racines suivantes :

$$X_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-4-2\sqrt{5}}{2}=-2-\sqrt{5} \qquad X_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2{\cdot}a}=\frac{-4+2\sqrt{5}}{2}=-2+\sqrt{5}$$

En utilisant le changement de variable $X=e^x$, on en déduit l'unique solution de l'équation de départ :

$$\mathcal{S}=\left\{\ln\left(-2+\sqrt{5}\right)\right\}$$

Correction 12

1. a. Les termes de la suite (u_n) géométrique de premier terme 5 et de raison $\frac{3}{2}$ admet pour expression :

$$u_n=5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

De l'encadrement $0\leqslant\frac{2}{3}<1$: $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$

On en déduit la limite : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}u_n=0$

b. Résolvons l'inéquation :

$$u_n<0{,}01$$
$$5\times\left(\frac{2}{3}\right)^n<0{,}01$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^n<\frac{0{,}01}{5}$$

La fonction logarithme est croissante :

$$\ln\left[\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]<\ln\left(\frac{0{,}01}{5}\right)$$
$$n{\cdot}\ln\left(\frac{2}{3}\right)<\ln\left(\frac{0{,}01}{5}\right)$$

Le nombre $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ est un nombre négatif :

$$n>\frac{\ln\left(\frac{0{,}01}{5}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}$$

De la valeur approchée : $\dfrac{\ln\left(\frac{0{,}01}{5}\right)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\simeq15{,}33$

On en déduit l'ensemble des entiers naturel n solution de l'inéquation :

$$n\geqslant16$$

2. a. La suite (v_n) est géométrique de premier terme 2 et de raison $\frac{4}{5}$. Ainsi, le terme de rang n de la suite (v_n) admet l'expression :

$$v_n=2\times\left(\frac{4}{5}\right)^n$$

En remarquant la valeur de la différence :

$$S_{n+1}-S_n=v_{n+1}=2{\cdot}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

b. La suite (v_n) étant géométrique de raison différent de 1, la formule de la somme des termes d'une suite géométrique permet d'écrire :

$$S_n=v_0+v_1+\cdots+v_n=v_0\cdot\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
$$=2\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{1-\frac{4}{5}}=2\cdot\frac{1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{5}}$$
$$=2\cdot\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right]\times5=10\cdot\left[1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right]$$

c. De l'encadrement $0\leqslant\frac{4}{5}<1$, on a la limite :

$$\lim_{n\mapsto+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n=0$$

On en déduit la limite : $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}S_n=10$

Ainsi, la suite est croissante et convergente vers 10. Ainsi, il existe un entier N tel que tous les termes de la suite de rang supérieur à N soient inclus dans $[9{,}9\,;10]$.

d. Résolvons l'inéquation :

$$\begin{aligned}
S_n &\geqslant 9{,}9\\
10\cdot\Big[1-\Big(\frac{4}{5}\Big)^{n+1}\Big] &\geqslant 9{,}9\\
1-\Big(\frac{4}{5}\Big)^{n+1} &\geqslant \frac{9{,}9}{10}\\
-\Big(\frac{4}{5}\Big)^{n+1} &\geqslant \frac{9{,}9}{10}-1\\
-\Big(\frac{4}{5}\Big)^{n+1} &\geqslant -0{,}01\\
\Big(\frac{4}{5}\Big)^{n+1} &\leqslant 0{,}01
\end{aligned}$$

La fonction logarithme est croissante :

$$\begin{aligned}
\ln\Big[\Big(\frac{4}{5}\Big)^{n+1}\Big] &\leqslant \ln\big(0{,}01\big)\\
(n+1)\cdot\ln\Big(\frac{4}{5}\Big) &\leqslant \ln\big(0{,}01\big)
\end{aligned}$$

Le nombre $\ln\big(\frac{4}{5}\big)$ est strictement négatif :

$$\begin{aligned}
n+1 &\geqslant \frac{\ln\big(0{,}01\big)}{\ln\Big(\dfrac{4}{5}\Big)}\\
n &\geqslant \frac{\ln\big(0{,}01\big)}{\ln\Big(\dfrac{4}{5}\Big)}-1
\end{aligned}$$

On a la valeur approchée : $\dfrac{\ln\big(0{,}01\big)}{\ln\Big(\dfrac{4}{5}\Big)}-1 \simeq 19{,}6$

Ainsi, les termes de la suite $\big(S_n\big)$ appartiennent à l'intervalle $\big[9{,}9\,;10\big]$ à partir du rang 20.

Correction 13

a. On a les deux limites :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 2\cdot\ln x=+\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} x=+\infty$
On en déduit la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 2\cdot\ln x+x=+\infty$

b. On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto-3^+} \ln(x+3)=-\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto-3^+} -3\cdot x=9$
On en déduit la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto-3^+} \ln(x+3)-3\cdot x=-\infty$

c. On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto0^+} \ln(x)=-\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto0^+} -\dfrac{1}{x}=-\infty$
On en déduit la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto0^+} \ln(x)-\dfrac{1}{x}=-\infty$

d. On a la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^x+1=+\infty$
La fonction logarithmique est continue et admet la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ln x=+\infty$
Par composition des limites, on a :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ln\big(e^x+1\big)=+\infty$

e. On a la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto0^+} \ln x=-\infty \implies \lim\limits_{x\mapsto0^+} -2\cdot\ln x+1=+\infty$
La fonction exponentielle est continue et admet la limite suivante : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} e^x=+\infty$
Par composition des fonctions, on a la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto0^+} e^{-2\cdot\ln x+1}=+\infty$

f. Remarquons la factorisation suivante :
$x^2-x=x\cdot\big(x-1\big)$
On a les deux limites :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x=+\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} x-1=+\infty$
On en déduit la limite : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^2-x=+\infty$
La fonction logarithme est continue et admet la limite suivante : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ln x=+\infty$
Par composition des fonctions, on a la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ln\big(x^2-x\big)=+\infty$

Correction 14

a. la fonction f est définie comme le produit des fonctions u et de v définies par :
$u(x)=x \quad ; \quad v(x)=\ln x$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x)=1 \quad ; \quad v'(x)=\dfrac{1}{x}$
La formule de dérivation d'un produit donne l'expression de la fonction f' :

$$\begin{aligned}
f'(x)&=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)\\
&=1\cdot\ln x+x\cdot\frac{1}{x}=\ln x+1
\end{aligned}$$

b. La fonction g est définie comme le quotient des fonctions u et v définies par :
$u(x)=\ln x+1 \quad ; \quad v(x)=x^2+1$
qui admettent pour dérivée :
$u'(x)=\dfrac{1}{x} \quad ; \quad v'(x)=2\cdot x$
La formule de dérivation d'un quotient donne l'expression de la fonction g' :

$$\begin{aligned}
g'(x)&=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}\\
&=\frac{\dfrac{1}{x}\cdot(x^2+1)-\big(\ln x+1\big)\cdot2\cdot x}{\big(x^2+1\big)^2}\\
&=\frac{x\cdot\Big[\dfrac{1}{x}\cdot(x^2+1)-\big(\ln x+1\big)\cdot2\cdot x\Big]}{x\cdot\big(x^2+1\big)^2}\\
&=\frac{x^2+1-2\cdot x^2\cdot\ln x-2\cdot x^2}{x\cdot\big(x^2+1\big)^2}
\end{aligned}$$

c. La fonction h est donnée sous la forme $\ln u$ où :
$u(x)=\sqrt{1-x} \quad ; \quad u'(x)=\dfrac{-1}{2\cdot\sqrt{1-x}}$
La formule de dérivation de la fonction logarithme donne :

$$\begin{aligned}
h'(x)&=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{\dfrac{-1}{2\cdot\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1-x}}=-\frac{1}{2\cdot\sqrt{1-x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x}}\\
&=-\frac{1}{2\cdot\big(\sqrt{1-x}\big)^2}=-\frac{1}{2\cdot|1-x|}=-\frac{1}{2\cdot(1-x)}
\end{aligned}$$

d. La fonction j est définie comme la composée de la fonction u par la fonction logarithme où :
$u(x)=e^x-1 \quad ; \quad u'(x)=e^x$
La formule de la dérivée de la composée d'une fonction par la fonction logarithme donne l'expression de la fonction j' :

$$j'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

Correction 15

1. On remarque que la fonction g s'annule en 1 :
$g(1) = 1^2 - 1 + \ln 1 = 1 - 1 + 0 = 0$

Nous allons étudier le sens de variation de la fonction g. Pour cela, déterminons l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g :

$$g'(x) = 2x - 0 + \frac{1}{x} = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$$

Sur l'intervalle $\big[1\,;+\infty\big[$, le numérateur et le dénominateur sont tous deux strictement positifs, on en déduit que la fonction g' est strictement positive sur $\big[1\,;+\infty\big[$.

On en déduit que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $\big[1\,;+\infty\big[$.
On a les limites suivantes aux bornes de son ensemble de définition :

- $g(1) = 1^2 - 1 + \ln 1 = 1 - 1 + 0 = 0$
- On a les deux limites suivantes :
$\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} x^2 - 1 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} \ln x = +\infty$
On en déduit la limite suivante :
$\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty} g(x) = \lim_{x\mapsto+\infty} x^2 - 1 + \ln(x) = +\infty$

On obtient le tableau de variation suivant :

x	1	$+\infty$
Variation de g	0	$+\infty$

D'après le tableau de variations, la fonction g admet pour minimum 0 pour $x=1$. On en déduit que la fonction g est positive sur $\big[1\,;+\infty\big[$.

2. a. En considérant les deux fonctions u et v définies par :
$u(x) = \ln(x) \quad ; \quad v(x) = x$
qui admmettent pour dérivée :
$u'(x) = \dfrac{1}{x} \quad ; \quad v'(x) = 1$
On peut écrire l'expression de la fonction f sous la forme :
$f(x) = x - \dfrac{u(x)}{v(x)}$
La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x) = 1 - \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$

$$= 1 - \frac{\frac{1}{x}\cdot x - (\ln x)\cdot 1}{x^2} = 1 - \frac{1 - (\ln x)\cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - \big(1 - \ln x\big)}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b. La fonction g étant positive sur l'intervalle $\big[1\,;+\infty\big[$, on en déduit que la fonction f' est positive sur cet intervalle.

On en déduit que la fonction f est croissante sur $\big[1\,;+\infty\big[$.

