Fonctions : limites, continuité, dérivabilité.

Exercice 1

Questionnaire à choix multiples :

Pour chaque question, une seule des trois réponses est exacte. Une bonne réponse rapporte 0,5 point une mauvaise réponse enlève 0,25 point ; l'absence de réponse donne 0 point. Si le total des points est négatif, la note globale attribuée est 0.

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $\left]-5\,;+\infty\right[$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous :

x	-5		-1		0		2		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	↗	-3	↘	-5	↗	4	↘	-4,5

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f :

1. Sur l'intervalle $\left]-5\,;+\infty\right[$, l'équation $f(x)=-2$:
   a. admet une seule solution
   b. admet deux solutions
   c. admet quatre solutions.

2. Sur l'intervalle $\left]-5\,;+\infty\right[$, la fonction f :
   a. admet pour minimum la valeur -5 ;
   b. admet pour maximium la valeur 4 ;
   c. admet deux maximums.

3. On sait que l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :
   a. $y=4$ b. $y=4(x-2)$ c. $x=4$

Exercice 2

Factoriser, si possible, les polynômes du second degré ci-dessous :

a. $3x^2+4x+1$ b. $-3x^2+4x-1$ c. $-4x^2+5x$
d. x^2+2x-1 e. $-x^2+4x+1$ f. $3x^2-4x+2$

Exercice 3

Déterminer les limites ci-dessous :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^+}\frac{x^2-3x+5}{x-1}$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^+}\frac{5-x}{1-x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^-}\frac{x^2+x+1}{x}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{x-1}{-x^3}$

Exercice 4

Déterminer la valeur des limites suivantes :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}2{\cdot}x^2+3{\cdot}x$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}-3{\cdot}x^3+\frac{2}{x}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}5{\cdot}x^2-3{\cdot}x^3$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}x^2+2{\cdot}x-(x+2)^2$

e. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}x^2+3{\cdot}x$ f. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}x^3-2{\cdot}x^2$

Exercice 5

1. On considère la fonction f définie par :
$$f\colon x\longmapsto\frac{3x^2+5x}{3x^3+4x+1}$$
   a. Etablir l'égalité suivante :
$$\frac{3x^2+5x}{3x^3+4x+1}=\frac{3+\dfrac{5}{x}}{x{\cdot}\left(3+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}$$
   b. En déduire la valeur de la limite : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)$.

2. On considère la fonction g définie par :
$$g\colon x\longmapsto\frac{4x^3+2x+1}{2x^3-2x^2}$$
Par un raisonnement analogue à la question précédente, établir l'égalité suivante : $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}g(x)=2$

Exercice 6

On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation : $f(x)=\dfrac{2{\cdot}x^3-x}{x^3+2{\cdot}x^2}$

1. Etablir les identités suivantes :
$$f(x)=\frac{2-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}}=\frac{2{\cdot}x^2-1}{x{\cdot}(x+2)}$$

2. Déterminer la valeur des limites suivantes :
$\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)$; $\displaystyle\lim_{x\mapsto 0^+}f(x)$

Exercice 7

1. Etablir l'égalité algébrique suivante pour $x\in\mathbb{R}^*$:
$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}{x-1}$$

2. En déduire la valeur de la limite :
$$\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}=-2$$

Exercice 8

Chacune des limites ci-dessous représente une forme indéterminée ; effectuer les transformations algébriques adéquates pour déterminer chacune de ses limites :

a. $\displaystyle\lim_{x\mapsto+\infty}x\sqrt{x}-x$ b. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 1^+}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+x-2}$

c. $\displaystyle\lim_{x\mapsto 2^-}\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$ d. $\displaystyle\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{5x^2-3x+1}{2x^2+x-2}$

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x)=\frac{2{\cdot}x+1}{\sqrt{x^2+1}}$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

https://chingatome.fr (cc) BY-NC

2. Etablir l'identité suivante : $f(x)=\dfrac{x\cdot\left(2+\dfrac{1}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}$

3. En déduire les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$

Exercice 10

On considère la fonction f définie par la relation :
$f(x)=\dfrac{5}{x^2+2-\cos x}$

1. Justifier que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. a. Etablir l'encadrement suivant :
$\dfrac{5}{x^2+3}\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{5}{x^2+1}$
   b. En déduire la valeur de la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$

Exercice 11

Déterminer l'expression de la fonction dérivée de chacune des fonction suivantes :

a. $f(x)=\left(3\cdot x+5\right)^5$
b. $g(x)=\dfrac{1}{3\cdot x^4+11}$
c. $h(x)=\sqrt{x^2+x+1}$
d. $j(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x}}$

Exercice 12

On considère la fonction f définie par la relation :
$f(x)=\sqrt{6x^2+13x-5}$

1. Justifier que la fonction f admet pour ensemble de définition la partie I de $\mathbb{R}$ définie par :
$I=\left]-\infty\,;-\dfrac{5}{2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[.$
2. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur son ensemble de définition I.

Exercice 13

1. On considère la fonction f dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :
$f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}$
   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
   b. Déterminer la valeur des deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto0^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\mapsto0^+} f(x)$
   c. Peut-on dire que la fonction f est continue en 0?
2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{pour } x\neq0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$
Justifier que la fonction f est continue en 0.

Exercice 14

1. Soit n un entier naturel non-nul quelconque. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par la relation :
$f(x)=\left(1+x\right)^n-1-n\cdot x$
Etablir le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}_+$.
2. Etablir l'inégalité ci-dessous pour tout nombre x positif et tout entier naturel n strictement positif :
$\left(1+x\right)^n\geqslant1+n\cdot x$

L'inégalité établie à la dernière question s'appelle : ***Inégalité de Bernoulli***

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'image d'un nombre x est définie par la relation :
$f(x)=x-1+\dfrac{2}{x^2+1}$

1. Déterminer l'expression de la dérivée f' de la fonction f, ainsi que celle de la dérivée seconde f''.
2. a. Etudier le signe de la fonction f''.
   b. En déduire le tableau de variation de la fonction f'.
(Une valeur approchée des extrémums sera cherchée à l'aide de la calculatrice)
3. a. Montrer que la fonction f' s'annule pour $x=1$ et aussi en un nombre α vérifiant l'encadrement :
$0{,}2<\alpha<0{,}3$
   b. En déduire le tableau de signe de la fonction f'.
4. a. Déterminer la valeur des deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$
   b. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
(Une valeur approchée des extrémums sera cherchée à l'aide de la calculatrice)

BY-NC