Fonctions : limites, continuité, dérivabilité.

Correction 1

1. Réponse b.
Il y a deux solutions à cette équation :

- L'image de l'intervalle $[0\,;2]$ est :
  $f\big([0\,;2]\big)=[-5\,;4]$
  De plus, f est strictement croissante sur cet intervalle ; on en déduit que la valeur -2 est atteinte une fois.
- L'image de l'intervalle $[2\,;+\infty[$ est :
  $f\big([2\,;+\infty[\big)=]-4{,}5\,;4]$
  La fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle ; on en déduit que la valeur -2 est atteinte une fois.

2. Réponse b.
Le tableau de variation montre que la fonction atteint son maximum 4 pour la valeur $x=2$.

La fonction f n'admet pas de maximum mais deux maximums locaux ; le maximum d'un fonction doit être global sur son ensemble de définition.

3. Réponse a.
La fonction f admet un maximum en 2 ; la fonction étant dérivable en 2, on en déduit la valeur suivante du nombre dérivée :
$f'(2)=0$

La courbe $\mathscr{C}$ admet pour tangente au point d'abscisse 2, la droite d'équation :
$y=f'(2)\cdot(x-2)+f(2)$
$y=0\cdot(x-2)+4$
$y=4$

Correction 2

a. L'expression $3x^2+4x+1$ a pour discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times3\times1=16-12=4$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$

Le discriminant étant strictement positif, cette expression admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad\Big|\quad x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$=\frac{-4-2}{2\times3} \quad\Big|\quad =\frac{-4+2}{2\times3}$$
$$=\frac{-6}{6} \quad\Big|\quad =\frac{-2}{6}$$
$$=-1 \quad\Big|\quad =-\frac{1}{3}$$

On a la factorisation suivante :
$3x^2+4x-1=3\left[x-\left(-\frac{1}{3}\right)\right][x-(-1)]$
$=3\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(x+1\right)=3(3x+1)(x+1)$

b. L'expression $-3x^2+4x-1$ a pour discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times(-3)\times(-1)=16-12=4$
On a la simplification : $\sqrt{\Delta}=\sqrt{4}=2$

Le discriminant étant strictement positif, cette expression admet les deux racines suivantes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad\Big|\quad x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$=\frac{-4-2}{2\times(-3)} \quad\Big|\quad =\frac{-4+2}{2\times(-3)}$$
$$=\frac{-6}{-6} \quad\Big|\quad =\frac{-2}{-6}$$
$$=1 \quad\Big|\quad =\frac{1}{3}$$

On a la factorisation suivante :
$-3x^2+4x-1=(-3)\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-1\right)$
$=(-3x+1)(x-1)$

c. L'expression $-4x^2+5x$ admet la factorisation :
$-4x^2+5x=x(-4x+5)$

Il était également possible de calculer le discriminant de cette expression puis de rechercher les deux racines pour obtenir la même forme factorisée.

d. L'expression x^2+2x-1 a pour discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=2^2-4\times1\times(-1)=4+4=8$
On a la simplification : $\sqrt{8}=\sqrt{4\times2}=2\sqrt{2}$

Le discriminant étant strictement positif, cette expression admet les deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad\Big|\quad x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$=\frac{-2-2\sqrt{2}}{2\times1} \quad\Big|\quad =\frac{-2+2\sqrt{2}}{2\times1}$$
$$=\frac{-2-2\sqrt{2}}{2} \quad\Big|\quad =\frac{-2+2\sqrt{2}}{2}$$
$$=-1-\sqrt{2} \quad\Big|\quad =-1+\sqrt{2}$$

On a la factorisation suivante :
$x^2+2x-1=\left[x-(-1-\sqrt{2})\right]\left[x-(-1+\sqrt{2})\right]$
$=(x+1+\sqrt{2})(x+1-\sqrt{2})$

e. L'expression $-x^2+4x+1$ a pour discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=4^2-4\times(-1)\times1=16+4=20$
On a la simplification : $\sqrt{20}=\sqrt{4\times5}=2\sqrt{5}$

Le discriminant étant strictement positif, cette expression admet les deux racines :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad\Big|\quad x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$=\frac{-4-2\sqrt{5}}{2\times(-1)} \quad\Big|\quad =\frac{-4+2\sqrt{5}}{2\times(-1)}$$
$$=\frac{-4-2\sqrt{5}}{-2} \quad\Big|\quad =\frac{-4+2\sqrt{5}}{-2}$$
$$=2+\sqrt{5} \quad\Big|\quad =2-\sqrt{5}$$

On a la factorisation suivante :
$-x^2+4x+1=-\left[x-(2+\sqrt{5})\right]\left[x-(2-\sqrt{5})\right]$
$=-(x-2-\sqrt{5})(x-2+\sqrt{5})$

f. L'expression $3x^2-4x+2$ a pour discriminant :
$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times3\times2=16-24=-8$

Le discriminant étant strictement négatif, cette expression n'admet pas de racine : elle ne peut se factoriser en

CC BY-NC

produit de facteurs de premier degré.

Correction 3

a. On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto 1^+} x^2-3x+5=3 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto 1^+} x-1=0^+$
On en déduit la limite du quotient :
$\lim\limits_{x\mapsto 1^+} \dfrac{x^2-3x+5}{x+1}=+\infty$

b. On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto 1^+} 5-x=4 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto 1^+} 1-x=0^-$
On en déduit la limite du quotient :
$\lim\limits_{x\mapsto 1^+} \dfrac{5-x}{1-x}=-\infty$

c. On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto 0^-} x^2+x+1=1 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto 0^-} x=0^-$
On en déduit la limite du quotient :
$\lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{x^2+x+1}{x}=-\infty$

d. On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto 0^+} x-1=-1 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto 0^+} -x^3=0^-$
On en déduit la limite du quotient :
$\lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x-1}{-x^3}=+\infty$

Correction 4

a. On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} 2{\cdot}x^2=+\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto +\infty} 3{\cdot}x=+\infty$
On en déduit la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} 2{\cdot}x^2+3{\cdot}x=+\infty$

b. On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} -3{\cdot}x^3=-\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto +\infty} \dfrac{2}{x}=0$
On en déduit la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} -3{\cdot}x^2+\dfrac{2}{x}=-\infty$

c. On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} 5{\cdot}x^2=+\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto -\infty} -3{\cdot}x^3=+\infty$
On en déduit la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} 5{\cdot}x^2-3{\cdot}x^3=+\infty$

d. On a les transformations algébriques suivantes :
$x^2+2{\cdot}x-(x+2)^2=x^2+2{\cdot}x-\left(x^2+4{\cdot}x+4\right)$
$=x^2+2{\cdot}x-x^2-4{\cdot}x-4=-4{\cdot}x-2$
On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} -4{\cdot}x=-\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto +\infty} -2=-2$
On a en déduit la valeur de la limite :
$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} x^2+2{\cdot}x-(x+2)^2=\lim\limits_{x\mapsto +\infty} -4{\cdot}x-2=-\infty$

e. On a la factorisation suivante :
$x^2+3{\cdot}x=x{\cdot}(x+3)$
On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} x=-\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto -\infty} x+3=-\infty$
On a en déduit la valeur de la limite :
$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} x^2+3{\cdot}x=\lim\limits_{x\mapsto +\infty} x{\cdot}(x+3)=+\infty$

f. On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} x^3=-\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto -\infty} -2{\cdot}x^2=-\infty$
On a en déduit la limite suivante :
$\lim\limits_{x\mapsto -\infty} x^3-2{\cdot}x^2=-\infty$

Correction 5

1. a. On a les transformations algébriques suivantes :
$$\frac{3x^2+5x}{3x^3+4x+1}=\frac{x^2{\cdot}\left(3+\dfrac{5}{x}\right)}{x^3{\cdot}\left(3+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}=\frac{3+\dfrac{5}{x}}{x{\cdot}\left(3+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}$$

b. On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} 3+\dfrac{5}{x}=3 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto +\infty} x{\cdot}\left(3+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)=+\infty$
On en déduit la limite du quotient :
$$\lim_{x\mapsto +\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{3+\dfrac{5}{x}}{x{\cdot}\left(3+\dfrac{4}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}=0$$

2. Pour $x\neq 0$, on a les transformations algébriques :
$$\frac{4x^3+2x+1}{2x^3-2x^2}=\frac{x^3{\cdot}\left(4+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3{\cdot}\left(2-\dfrac{2}{x}\right)}=\frac{4+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{2}{x}}$$
On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} 4+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}=4 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto +\infty} 2-\dfrac{2}{x}=2$
On a en déduit la limite de la fonction g en $+\infty$:
$$\lim_{x\mapsto +\infty} g(x)=\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{4+\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{2-\dfrac{2}{x}}=\frac{4}{2}=2$$

Correction 6

1. Pour $x\neq 0$, on a les transformations algébriques :

- $f(x)=\dfrac{2x^3-x}{x^3+2x^2}=\dfrac{x^3{\cdot}\left(2-\dfrac{x}{x^3}\right)}{x^3{\cdot}\left(1+\dfrac{2x^2}{x^3}\right)}=\dfrac{x^3{\cdot}\left(2-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^3{\cdot}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)}=\dfrac{2-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}}$
- $f(x)=\dfrac{2x^3-x}{x^3+2x^2}=\dfrac{x{\cdot}\left(2x^2-1\right)}{x{\cdot}\left(x^2+2x\right)}=\dfrac{2x^2-1}{x^2+2x}=\dfrac{2x^2-1}{x{\cdot}(x+1)}$

2. L'expression initiale de $f(x)$ représente une forme indéterminée pour les deux limites demandées. Il faut utiliser pour chacune des limites une des deux expressions proposées ne présentant de forme indéterminée pour la limite considérée :

- On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto +\infty} 2-\dfrac{1}{x^2}=2 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto +\infty} 1+\dfrac{2}{x}=1$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto +\infty} f(x)=\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{2-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{2}{x}}=\frac{2}{1}=2$$
- On a les deux limites suivantes :
$\lim\limits_{x\mapsto 0^+} 2x^2-1=-1 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto 0^+} x{\cdot}(x+1)=0^+$
On en déduit la limite suivante :
$$\lim_{x\mapsto 0^+} f(x)=\lim_{x\mapsto 0^+} \frac{2x^2-1}{x{\cdot}(x+1)}=-\infty$$

Correction 7

1. Le facteur $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}$ étant non-nul, à l'aide de l'expression conjuguée du dénominateur, on a les transformations algébriques suivantes :

CC BY-NC

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}=\frac{x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}$$

$$=\frac{x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{x+1}\right)^2}=\frac{x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}{(x^2+1)-(x+1)}$$

$$=\frac{x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}{x^2+1-x-1}=\frac{x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}\right)}{x\cdot(x-1)}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}{x-1}$$

2. On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto 0^+}\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}=2\quad;\quad\lim_{x\mapsto 0^+}x-1=-1$$

On en déduit la limite du quotient :

$$\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+1}}=\lim_{x\mapsto 0^+}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x+1}}{x-1}$$

$$=\frac{2}{-1}=-2$$

Correction 8

a. $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x\sqrt{x}-x=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x\left(\sqrt{x}-1\right)$

Or, $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x}-1=+\infty$

$=+\infty$

b. Au préalable, on remarque que 1 est une racine du dénominateur du second terme ; ce qui permet d'effectuer de tête la factorisation suivante :

$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$

On a les transformations algébriques suivantes :

$$\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

$$=\frac{x+2}{(x-1)(x+2)}-\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}$$

Etudions le signe de ce quotient :

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$x+1$	$-$		$-$		0	$+$		$+$	
$x-1$	$-$		$-$		$-$		0	$+$	
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$			$+$	
$\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}$	$-$	‖	$+$	0	$-$	‖		$+$	

Ainsi, d'après le tableau de signe, on peut affirmer que :

$$\lim_{x\mapsto 1^+}\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x^2+x-2}=\lim_{x\mapsto 1^+}\frac{x+1}{(x-1)(x+2)}$$

$=+\infty$

c. Le facteur $\sqrt{2x}+2$ est non-nul. On a :

$$\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}=\frac{(x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{\left(\sqrt{2x}-2\right)\left(\sqrt{2x}+2\right)}$$

$$=\frac{(x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{\left(\sqrt{2x}\right)^2-2^2}=\frac{(x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{2x-4}$$

$$=\frac{(x-2)\left(\sqrt{2x}+2\right)}{2(x-2)}=\frac{\sqrt{2x}+2}{2}=2$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{x\mapsto 2^-}\frac{x-2}{\sqrt{2x}-2}=\lim_{x\mapsto 2^-}\frac{\sqrt{2x}+2}{2}=2$$

d. La limite étudiée étant en $-\infty$, considérons que x est strictement négatif :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{5x^2-3x+1}{2x^2+x-2}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{x^2\left(5-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}$$

$$=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{5-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{5}{2}$$

Correction 9

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$x^2\geqslant 0$$
$$x^2+1\geqslant 1>0$$
$$x^2+1>0$$

Ainsi, la racine de x^2+1 existe et vérifie :

$$\sqrt{x^2+1}>0$$

Le dénominateur existant et étant non-nul sur $\mathbb{R}$, on en déduit que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Pour $x\neq 0$, on a les transformations algébriques suivantes :

$$f(x)=\frac{2\cdot x+1}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$=\frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

3. Etudions l'expression de la fonction f :

- au voisinage de $-\infty$:

$$f(x)=\frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{-x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{2+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}2+\frac{1}{x}=2\quad;\quad\lim_{x\mapsto-\infty}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-1$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{2}{-1}=-2$$

- au voisinage de $+\infty$:

$$f(x)=\frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{|x|\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{x\cdot\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\cdot\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}2+\frac{1}{x}=2\quad;\quad\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=1$$

On en déduit la limite suivante :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{2}{1}=2$$

Correction 10

CC BY-NC

1. L'encadrement suivant montre que le dénominateur de la fraction définissant f ne s'annule pas :

$$\begin{aligned} -1 \leqslant &\quad \cos x &\leqslant 1 \\ -1 \leqslant &\quad -\cos x &\leqslant 1 \\ 1 \leqslant &\quad 2-\cos x &\leqslant 3 \end{aligned}$$

$$0 < x^2+1 \leqslant x^2+2-\cos x \leqslant x^2+3$$

On en déduit que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$:

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

2. a. Reprenons l'encadrement précédent :

$0 < x^2+1 \leqslant x^2+2-\cos x \leqslant x^2+3$

La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2+1} &\geqslant \frac{1}{x^2+2-\cos x} \geqslant \frac{1}{x^2+3} \\ \frac{1}{x^2+3} &\leqslant \frac{1}{x^2+2-\cos x} \leqslant \frac{1}{x^2+1} \\ \frac{5}{x^2+3} &\leqslant \frac{5}{x^2+2-\cos x} \leqslant \frac{5}{x^2+1} \\ \frac{5}{x^2+3} &\leqslant \quad f(x) \quad \leqslant \frac{5}{x^2+1} \end{aligned}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \frac{5}{x^2+1} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\mapsto+\infty} \frac{5}{x^2+3} = 0$$

D'après le théorème des gendarmes, on a la valeur suivante de la limite :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = 0$$

Correction 11

a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction f est la puissance 5-ième de la fonction $u(x)$ où :

$u(x) = 3x+5 \quad ; \quad u'(x) = 3$

La formule de dérivation de la puissance d'une fonction donne l'expression de la fonction f :

$$f'(x) = 5\cdot u'(x)\cdot\big[u(x)\big]^4 = 5\times 3\cdot\big(3x+5\big)^4 = 15\cdot\big(3x+5\big)^4$$

b. Le dénominateur étant toujours strictement positif, la fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La fonction g est définie par l'inverse de la fonction u définie par :

$u(x) = 3x^4+1 \quad ; \quad u'(x) = 12\cdot x^3$

La formule de dérivation de l'inverse d'une fonction permet d'obtenir l'expression de la fonction g', dérivée de la fonction g :

$$g'(x) = -\frac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2} = -\frac{12\cdot x^3}{\big(3x^4+11\big)^2}$$

c. La fonction h est la composée de la fonction u par la fonction racine carrée où :

$u(x) = x^2+x+1 \quad ; \quad u'(x) = 2x+1$

La formule de dérivation d'une fonction racine carrée permet d'obtenir la dérivée de h' :

$$h'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$$

d. La fonction j est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$.

La fonction j est la composée de la fonction u par la fonction racine carrée où :

$u(x) = \dfrac{1}{x} \quad ; \quad u'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Ainsi, la formule de dérivation de la fonction racine carrée permet d'obtenir l'expression de la fonction j' :

$$j'(x) = \frac{u'(x)}{2\cdot\sqrt{u(x)}} = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}} = -\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}} = -\frac{1}{2x^2\cdot\sqrt{\frac{1}{x}}}$$

Correction 12

1. Déterminons le signe du polynôme du second degré situé sous le radical. Ce polynôme a pour discriminant :

$\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c = 13^2-4\times 6\times(-5) = 169-(-120) = 289$

On a la simplification : $\sqrt{289} = \sqrt{17^2} = 17$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} \\ &= \frac{-13-17}{2\times 6} \\ &= \frac{-30}{12} \\ &= -\frac{5}{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_2 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2\cdot a} \\ &= \frac{-13+17}{2\times 6} \\ &= \frac{4}{12} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Le coefficient du second degré étant strictement positif, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$6x^2+13x-5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Une racine carrée n'étant définie que pour un nombre positif ou nul, on en déduit que l'image d'un nombre x par la fonction f ne peut exister que si l'expression sous le radical est positif ou nul. On en déduit l'ensemble de définition de la fonction f :

$$\mathcal{D}_f = I = \left]-\infty\,;-\frac{5}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$$

2. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme de la composée d'une fonction u par la fonction racine carrée où :

$u(x) = 6x^2+13x-5 \quad ; \quad u'(x) = 12x+13$

Par la formule de la dérivée de la composée d'une fonction par la fonction racine carrée, on obtient l'expression de la fonction f', dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\cdot\sqrt{u(x)}} = \frac{12x+13}{2\cdot\sqrt{6x^2+13x-5}}$$

Ainsi, on a le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$-\frac{13}{12}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$12x+13$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2\sqrt{6x^2+13x-5}$	$+$	0					0	$+$	
$f'(x)$	$-$	‖					‖	$+$	

Pour $x \neq 0$, on a les transformations algébriques :

$$f(x) = \sqrt{6x^2+13x-5} = \sqrt{x^2\cdot\left(6+\frac{13}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}$$

On a les deux limites suivantes :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} x^2 = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\mapsto-\infty} 6+\frac{13}{x}-\frac{5}{x^2} = 6$$

On en déduit la limite :

$$\lim_{x\mapsto-\infty} x^2\cdot\left(6+\frac{13}{x}-\frac{5}{x^2}\right) = +\infty \Longrightarrow \lim_{x\mapsto-\infty} f(x) = +\infty$$

De même, on obtient la limite : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$

CC BY-NC

Ainsi, la fonction f admet le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	↘	0	↗	0	↗	$+\infty$

Correction 13

1. a. L'expression placée sous le radical est toujours positive ; ainsi, la racine carrée est définie pour toute valeur réelle de x.

Pour que le quotient soit défini, il est nécessaire que son dénominateur soit non nul ; ainsi, l'image de 0 par la fonction f n'est pas définie.

Ainsi, l'ensemble de définition de la fonction f est :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

b. Le facteur $\sqrt{x^2+1}+1$ est non-nul. On a les transformations algébriques suivantes :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$= \frac{x^2+1-1^2}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \frac{x^2}{x\cdot\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

Ainsi, on a les deux limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\mapsto 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0^-} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = 0$
- $\lim\limits_{x\mapsto 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\mapsto 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} = 0$

c. La fonction n'est pas continue en 0 car elle n'est pas définie en 0.

2. La fonction g vérifie les trois conditions suivantes :

- Sur $\mathbb{R}_-^*$, on a l'égalité $g(x)=f(x)$; ainsi, on a la limite :
$$\lim_{x\mapsto 0^-} g(x) = \lim_{x\mapsto 0^-} f(x) = 0$$
- Sur $\mathbb{R}_+^*$, on a l'égalité $g(x)=f(x)$; ainsi, on a la limite :
$$\lim_{x\mapsto 0^+} g(x) = \lim_{x\mapsto 0^+} f(x) = 0$$
- Pour $x=0$, on a :
$$g(0) = f(0) = 0$$

Correction 14

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :

$$f(x) = \left[u(x)\right]^n - 1 - n\cdot x$$

où la fonction u est définie par :

$$u(x) = 1+x \quad ; \quad u'(x) = 1$$

La formule de dérivation de la puissance n$^{\text{ième}}$ d'une fonction permet d'obtenir l'expression de la fonction f' :

$$f'(x) = n\cdot u'(x)\cdot\left[u(x)\right]^{n-1} = n\times 1\cdot(1+x)^{n-1} - 0 - n$$

$$= n(1+x)^{n-1} - n = n\cdot\left[(1+x)^{n-1}-1\right]$$

Etudions le signe de la fonction f' dérivée de la fonction f. On a les comparaisons suivantes :

$$\begin{aligned} x &\geqslant 0 \\ 1+x &\geqslant 1 \\ (1+x)^n &\geqslant 1^n \\ (1+x)^n &\geqslant 1 \\ (1+x)^n - 1 &\geqslant 0 \\ n\cdot\left[(1+x)^n-1\right] &\geqslant n\times 0 \\ f'(x) &\geqslant 0 \end{aligned}$$

La fonction f' étant positive sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. En remarquant :

$$f(0) = (1+0)^n - 1 - 0\times x = 1^n - 1 - 0 = 1 - 1 = 0$$

On obtient le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$:

x	0		$+\infty$
Variation de f	0	↗	

On en déduit que la fonction f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre x appartenant à $\mathbb{R}_+$, on a la comparaison :

$$\begin{aligned} f(x) &\geqslant 0 \\ (1+x)^n - 1 - n\cdot x &\geqslant 0 \\ (1+x)^n &\geqslant 1 + n\cdot x \end{aligned}$$

Correction 15

1.

- La fonction f peut être écrite sous la forme :
$$f(x) = x - 1 + 2\times\frac{1}{u(x)}$$
où la fonction u est définie par :
$$u(x) = x^2+1 \quad ; \quad u'(x) = 2x$$
La formule de dérivation de la composée d'une fonction par la fonction inverse donne l'expression de la fonction f' :
$$f'(x) = 1 + 2\times\left[-\frac{u'(x)}{\left[u(x)\right]^2}\right]$$
$$= 1 + 2\times\left[-\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\right] = 1 - \frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$
- L'expression de la fonction f' est donnée sous la forme :
$$f'(x) = 1 - \frac{u(x)}{v(x)}$$
où les fonctions u et v sont définies par :
$$u(x) = 4x \quad ; \quad v(x) = \left(x^2+1\right)^2$$
qui admettent pour dérivées :
  - $u'(x) = 4$
  - L'expression de la fonction v est définie par le carré de la fonction w où :
  $$w(x) = x^2+1 \quad ; \quad w'(x) = 2x$$
  La formule de dérivation de la puissance n-ième d'une fonction donne :
  $$v'(x) = 2\times w'(x)\cdot w(x) = 2\times(2x)\left(x^2+1\right)$$
  $$= 4x\cdot\left(x^2+1\right)$$
  La formule de dérivation du quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f :

CC BY-NC

$$f''(x) = 0 - \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$$
$$= 0 - \frac{4\cdot\left(x^2+1\right)^2 - 4x\cdot\left[4x\cdot\left(x^2+1\right)\right.}{\left[\left(x^2+1\right)^2\right]^2}$$
$$= 0 - \frac{4\cdot\left(x^2+1\right)^2 - 16x^2\cdot\left(x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^4}$$
$$= -\frac{\left(x^2+1\right)\left[4\cdot\left(x^2+1\right) - 16x^2\right]}{\left(x^2+1\right)^4}$$
$$= -\frac{4\cdot\left(x^2+1\right) - 16x^2}{\left(x^2+1\right)^3} = -\frac{4x^2+4-16x^2}{\left(x^2+1\right)^3}$$
$$= -\frac{4-12x^2}{\left(x^2+1\right)^3} = \frac{12x^2-4}{\left(x^2+1\right)^3}$$

2. **a.** Le polynôme $12x^2-4$ admet la factorisation :
$12x^2-4 = 4\cdot\left(3x^2-1\right) = 4\cdot\left(\sqrt{3}\cdot x+1\right)\left(\sqrt{3}\cdot x-1\right)$
Ce polynôme admet les deux racines $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
Le numérateur du quotient définissant la fonction f'' est un polynôme du second degré dont le coefficient du terme du second degré est positif.
On a le tableau de signe de la fonction f'' :

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$12x^2-4$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. On a les deux valeurs approchées des deux images suivantes :
$$f'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \simeq 2{,}3 \quad ; \quad f'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \simeq -0{,}3$$
On a la transformation algébrique suivante :
$$f'(x) = 1 - \frac{4\cdot x}{\left(x^2+1\right)^2} = 1 - \frac{4\cdot x}{\left[x^2\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right]^2}$$
$$= 1 - \frac{4\cdot x}{x^4\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2} = 1 - \frac{4}{x^3\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2}$$
qui permet d'obtenir les deux limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\mapsto-\infty} 1 - \dfrac{4}{x^3\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2} = 1$
- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f'(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} 1 - \dfrac{4}{x^3\cdot\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^2} = 1$

On obtient le tableau de valeur suivant :

x	-∞		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
Variation de f'	1	↗	$1+\frac{9}{4\sqrt{3}}$	↘	$1-\frac{9}{4\sqrt{3}}$	↗	1

3. **a.** Etudions l'équation $f'(x)=0$ sur les trois intervalles suivants :

- Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right[$:
  La fonction f' admet un minimum valant 1 : la fonction f' ne s'annule pas sur ce minimum.
- Sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$:
  On a les deux images aux bornes de cet intervalle :
  $f'\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \simeq 2{,}3 \quad ; \quad f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \simeq -0{,}3$
  De plus :
  - la fonction f' est continue sur $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$
  - la fonction f' est strictement décroissante sur $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$
  - le nombre 0 est compris entre les images des bornes de cet intervalle.

  D'après le corollaire des valeurs intermédiaire, il existe, une unique valeur $\alpha\in\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,;\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ vérifiant :
  $f'(\alpha)=0$
  De plus, des valeurs approchées des images suivantes :
  $f'(0{,}2) \simeq 0{,}26 > 0 \quad ; \quad f'(0{,}3) = -0{,}01 < 0$
  la fonction f' étant continue et changeant de signe sur $\left[0{,}2\,;\,0{,}3\right]$, on en déduit :
  $\alpha\in\left[0{,}2\,;0{,}3\right]$
- Sur l'intervalle $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,;+\infty\right[$:
  On a les limites aux bornes de l'intervalle :
  $f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \simeq -0{,}3 \quad ; \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} f'(x) = +\infty.$
  De plus :
  - la fonction f' est continue sur $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,;+\infty\right[$
  - la fonction f' est strictement croissante sur $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,;+\infty\right[$
  - le nombre 0 est compris entre les limites aux bornes de cet intervalle.

  D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe, une unique valeur $\beta\in\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}\,;+\infty\right[$.
  En observant que $f'(1)=0$, on en déduit : $\beta=1$

b. Ainsi, la fonction f' admet le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4. **a.** On a les deux limites suivantes :

- $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x-1+\dfrac{2}{x^2+1} = -\infty$
- $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x-1+\dfrac{2}{x^2+1} = +\infty$

Ainsi, on obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		α		1		$+\infty$
Variation de f	$+\infty$	↗	$f(\alpha)\simeq 1{,}13$	↘	1	↗	$+\infty$

CC BY-NC