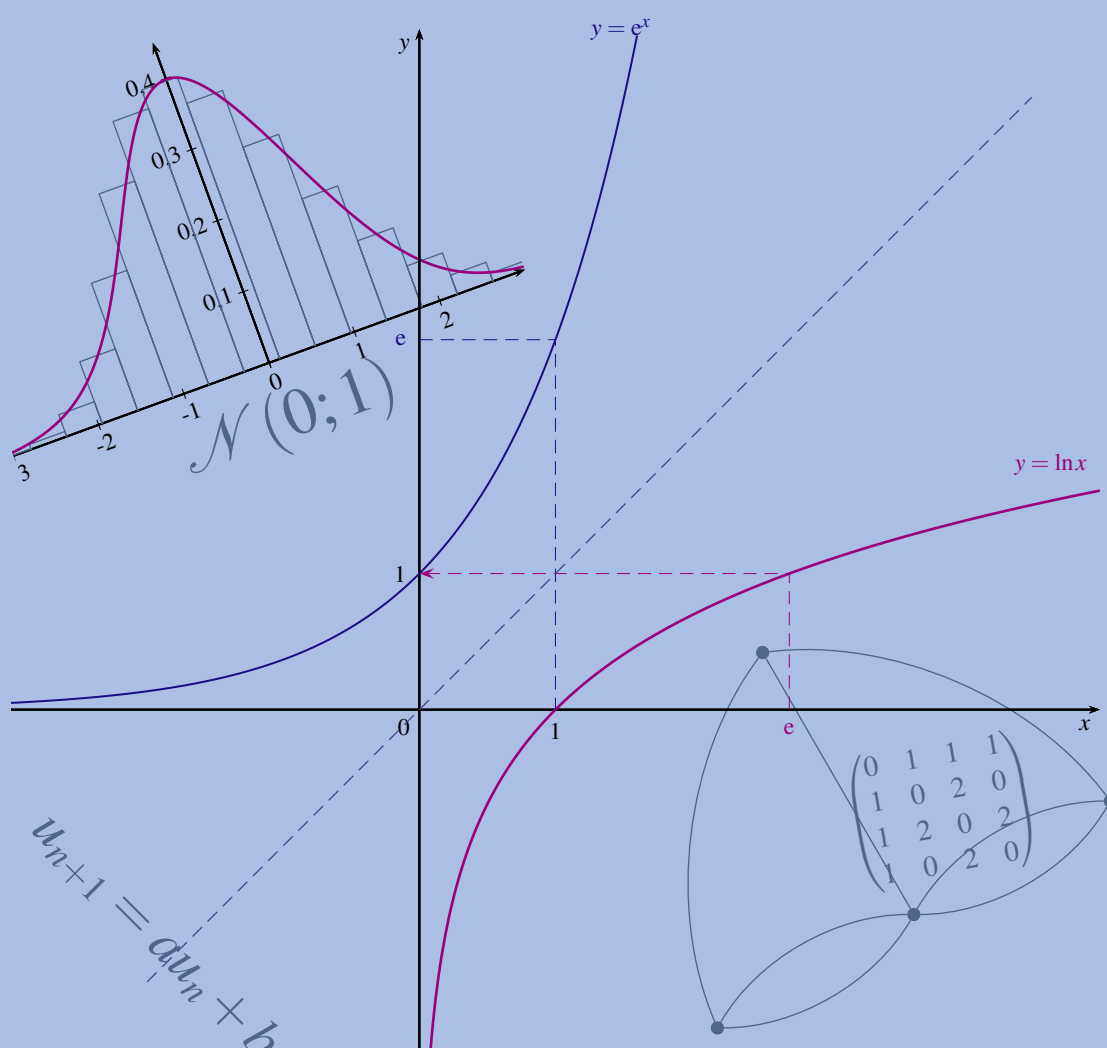


T^{le} ES

MATHÉMATIQUES

Enseignement spécifique et de spécialité



Le polycopié regroupe les documents distribués aux élèves de T^{le} ES 2 en cours d'année.

Janson de Sailly (année 2016-2017)

A. YALLOUZ

TABLE DES MATIÈRES

I	ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE	5
1	Compléments sur les suites	6
I	Suites géométriques	7
II	Limite d'une suite	9
III	Suites arithmético-géométriques	12
	Exercices	15
2	Dérivation, continuité et convexité	23
I	Dérivées	24
II	Continuité et équation	27
III	Continuité et équation	28
IV	Convexité	29
	Exercices	32
3	Fonction exponentielle	38
	Activités : Introduction	39
I	Fonctions exponentielles de base q	41
II	La fonction exponentielle	42
III	Exponentielle d'une fonction : $\exp(u)$	45
	Exercices	47
4	Probabilités discrètes	55
I	Probabilités conditionnelles	56
II	Formule des probabilités totales	57
III	Représentation sous forme d'un arbre pondéré	58
IV	Évènements indépendants	59
	Exercices	61
5	Fonction logarithme	69
I	Fonction logarithme népérien	70
II	Propriétés algébriques	71
III	Étude de la fonction logarithme népérien	72
	Exercices	74
6	Calcul intégral	83
I	Intégrale et aire	84
II	Primitives d'une fonction continue	87
III	Calcul de primitives	88
IV	Intégrale d'une fonction continue	89
V	Propriétés de l'intégrale	90
VI	Intégrale et moyenne	93
	Exercices	95

Chapitre 1

COMPLÉMENTS SUR LES SUITES

I	SUITES GÉOMÉTRIQUES	7
1	Définition	7
2	Propriété 1	7
3	Propriété 2	8
4	Monotonie	8
5	Somme de termes consécutifs	9
II	LIMITE D'UNE SUITE	9
1	Limite infinie	9
2	Limite finie	10
3	Limites d'une suite géométrique	11
III	SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES	12
1	Définition	12
2	Étudier une suite arithmético-géométrique	12
	EXERCICES	15

I SUITES GÉOMÉTRIQUES

1 DÉFINITION

Dire qu'une suite (u_n) est *géométrique* signifie qu'il existe un nombre réel q non nul tel que, pour tout entier n ,

$$u_{n+1} = qu_n$$

Le réel q est appelé la raison de la suite géométrique.

ÉVOLUTION EN POURCENTAGE

- Augmenter une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1 + \frac{t}{100}$.
- Diminuer une grandeur de $t\%$ équivaut à multiplier sa valeur par $1 - \frac{t}{100}$.

Chaque fois qu'on est confronté à une situation d'évolutions successives d'une grandeur de $t\%$, on peut définir une suite géométrique de raison $1 + \frac{t}{100}$ (augmentation) ou $1 - \frac{t}{100}$ (diminution)

EXEMPLES

1. Un capital de 2 000 € est placé au taux d'intérêt composé de 1,5% par an.

On note C_n le capital disponible au bout de n années alors :

$$C_{n+1} = \left(1 + \frac{1,5}{100}\right) \times C_n = 1,015 \times C_n$$

Ainsi, la suite (C_n) est une suite géométrique de premier terme $C_0 = 2000$ et de raison $q = 1,015$.

2. Pour lutter contre la pollution, un groupe industriel décide de réduire progressivement sa quantité de rejets de 4% par an. En 2012, la quantité de rejets était de 50 000 tonnes.

On note r_n la quantité de rejets l'année 2012 + n d'où :

$$r_{n+1} = \left(1 - \frac{4}{100}\right) \times r_n = 0,96 \times r_n$$

Ainsi, la suite (r_n) est une suite géométrique de premier terme $r_0 = 50000$ et de raison 0,96.

2 PROPRIÉTÉ 1

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors pour tout entier n ,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

EXEMPLE

L'objectif du groupe industriel est de réduire progressivement la quantité de rejets pour atteindre une quantité inférieure ou égale à 30 000 tonnes (soit une réduction de 40%). Cet objectif sera-t-il atteint au bout de 10 ans ? Au bout de 10 ans, la quantité de rejets est de :

$$r_{10} = 50000 \times 0,96^{10} \approx 33242$$

Avec une réduction de 4 % par an, en 2022 l'objectif du groupe industriel ne sera pas atteint.

3 PROPRIÉTÉ 2

Si (u_n) une suite géométrique de raison q alors pour tout entier n et pour tout entier p ,

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

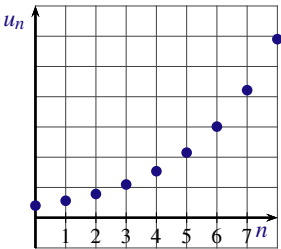
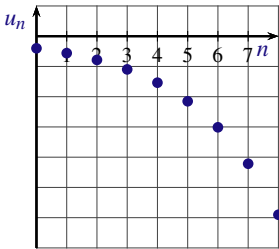
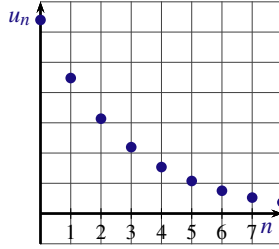
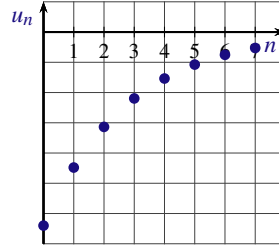
4 MONOTONIE

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n \\ &= u_0 \times q^n \times (q - 1) \end{aligned}$$

La monotonie de la suite dépend du signe de u_0 , q^n et $(q - 1)$

- Si $q < 0$ alors q^n est positif pour n pair, négatif pour n impair donc la suite n'est pas monotone.
- Si $q > 0$ alors la suite est monotone, croissante ou décroissante selon le signe du produit $u_0 \times (q - 1)$.

Si $q > 1$		Si $0 < q < 1$	
Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est croissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est décroissante	Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est croissante
			

Nous pouvons en déduire les deux théorèmes suivants

THÉORÈME 1

Soit q un réel non nul.

- Si $q < 0$ alors la suite (q^n) n'est pas monotone.
- Si $q > 1$ alors la suite (q^n) est strictement croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (q^n) est strictement décroissante.
- Si $q = 1$ alors la suite (q^n) est constante.

THÉORÈME 2

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q non nulle et de premier terme u_0 non nul

- Si $q < 0$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone.
- Si $q > 0$ et $u_0 > 0$ alors la suite (u_n) a le même sens de variation que la suite (q^n) .
- Si $q > 0$ et $u_0 < 0$ alors la suite (u_n) a le sens de variation contraire de celui de la suite (q^n) .

5 SOMME DE TERMES CONSÉCUTIFS

Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q \neq 1$ et de premier terme u_0 alors pour tout entier n ,

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{i=0}^n u_i = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)$$

Cette formule peut se retenir de la façon suivante :

La somme S de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$ est :

$$S = \text{premier terme} \times \frac{1 - q^{\text{nombre de termes}}}{1 - q}$$

II LIMITE D'UNE SUITE

On étudie le comportement d'une suite (u_n) quand n prend de grandes valeurs.

1 LIMITE INFINIE

DÉFINITION

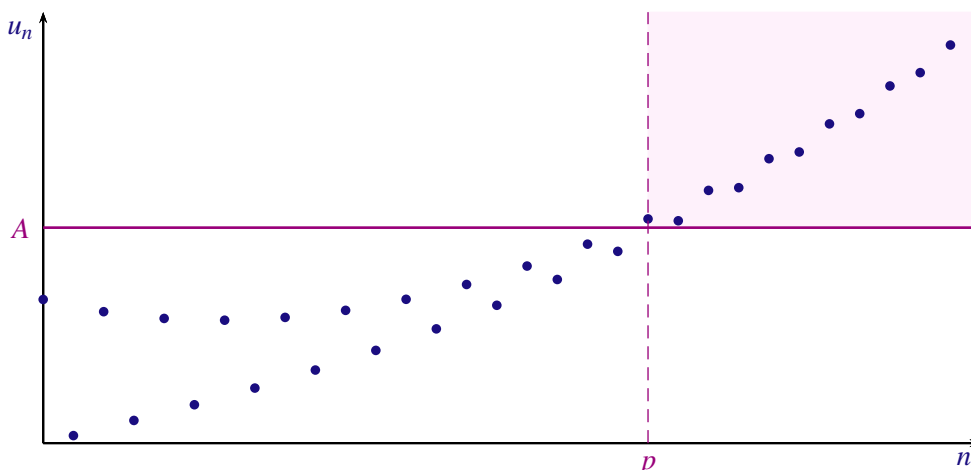
On dit qu'une suite (u_n) admet une limite égale à $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout nombre réel A strictement positif, tous les termes de la suite sont supérieurs à A à partir d'un certain rang p . On écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

Concrètement, une suite (u_n) tend vers $+\infty$ si u_n est aussi grand que l'on veut dès que n est suffisamment grand.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

On a représenté ci-dessous une suite (u_n) ayant une limite égale à $+\infty$



Pour tout entier $n \geq p$, $u_n > A$. p est le seuil à partir duquel $u_n > A$

DÉFINITION

On dit qu'une suite (u_n) admet une limite égale à $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$ si pour tout nombre réel A strictement négatif, tous les termes de la suite sont inférieurs à A à partir d'un certain rang p . On écrit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

2 LIMITE FINIE

DÉFINITION

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ et ℓ un réel.

1. Dire que la suite (u_n) admet pour limite le réel ℓ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]\ell - r; \ell + r[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p . On écrit :

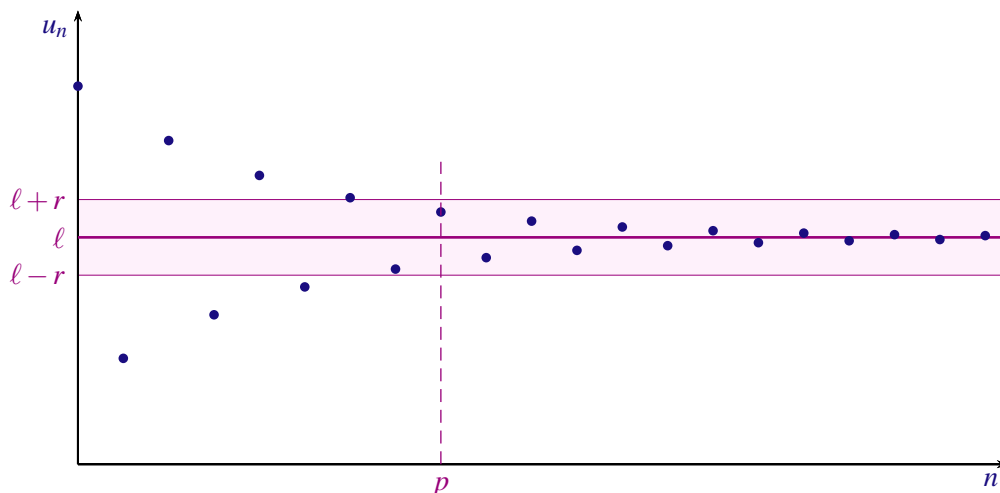
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

2. Une suite qui admet pour limite un réel ℓ est dite *convergente*.

Autrement dit, une suite (u_n) est convergente vers un réel ℓ si tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p peuvent être aussi proches que voulu de ℓ .

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Si on représente la suite convergente par un nuage de points dans un repère, à partir d'un certain rang p , tous les points sont dans la bande délimitée par les droites d'équation $y = \ell - r$ et $y = \ell + r$.



Le rang p est le seuil à partir duquel « u_n est à une distance de ℓ inférieure à r »

PROPRIÉTÉ

La suite (u_n) converge vers un réel ℓ si, et seulement si, la suite $(u_n) - \ell$ est convergente vers un 0.

REMARQUE

Une suite peut ne pas admettre de limite. Par exemple la suite de terme général $(-1)^n$ prend alternativement les valeurs 1 et -1 . Elle n'admet pas de limite.

3 LIMITES D'UNE SUITE GÉOMÉTRIQUE

THÉORÈME (admis)

Soit q un nombre réel :

- Si $-1 < q < 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n converge vers 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- Si $q > 1$ alors la suite géométrique de terme général q^n a pour limite $+\infty$: $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q < -1$ alors la suite géométrique de terme général q^n n'admet pas de limite finie ou infinie.

REMARQUE

Pour $q = 1$, la suite (q^n) est constante et égale à 1 donc convergente. Pour $q = -1$, la suite (q^n) prend alternativement les valeurs 1 et -1 suivant la parité de n , elle n'admet pas de limite.

COROLLAIRE

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 non nul et de raison q **strictement positive**.

- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Si $q = 1$ alors la suite (u_n) est constante et égale à u_0 .
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) admet une limite infinie avec :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \text{ si } u_0 < 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \text{ si } u_0 > 0$$

RECHERCHE D'UN SEUIL À L'AIDE D'UN ALGORITHME

EXEMPLE 1

Soit (r_n) la suite géométrique de raison 0,96 et de premier terme $r_0 = 50000$

Comme $0 < 0,96 < 1$ la suite (r_n) est décroissante et converge vers 0 : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 50000 \times 0,96^n = 0$.

L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est inférieur à 30 000. C'est à dire déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geq p$, $50000 \times 0,96^n \leq 30000$

```
INITIALISATION :
A = 50000 ;
I = 0;
TRAITEMENT :
TANT_QUE A > 30000 FAIRE
    I prend la valeur I + 1 ;
    A prend la valeur 0,96 × A ;
FIN TANT_QUE
SORTIE :
Afficher I
```

PROGRAMME	
TEXAS	CASIO
PROGRAM : SEUIL	===== SEUIL =====
: 50000 → A	50000 → A ↓
: 0 → I	0 → I ↓
: While A > 30000	While A > 30000 ↓
: I + 1 → I	I + 1 → I ↓
: 0.96*A → A	0.96*A → A ↓
: End	WhileEnd ↓
: Disp I	I

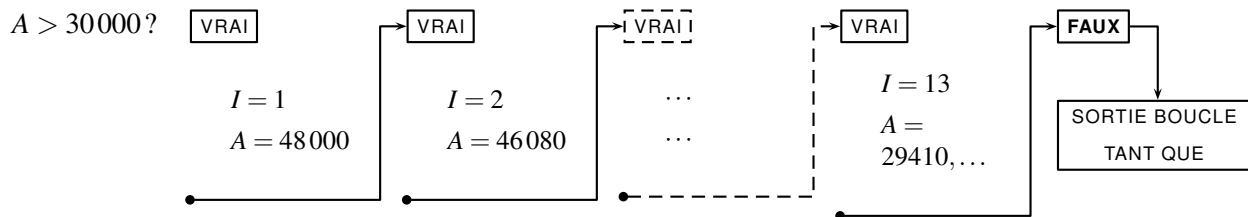
Initialisation :

$$A = 50000$$

$$I = 0$$

Traitement :

Tant que la condition $A > 30000$ est vraie, on effectue la suite d'instructions situées à l'intérieur de la boucle "TANT_QUE" et "FIN TANT_QUE"



Sortie :

La calculatrice affiche 13. Donc pour tout entier $n \geq 13$, $50000 \times 0,96^n \leq 30000$.

EXEMPLE 2

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 1,015 et de premier terme $u_0 = 2000$

$1,015 > 1$ et $u_0 > 0$ donc la suite (u_n) est croissante et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2000 \times 1,015^n = +\infty$.

L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite est supérieur à 3 000. C'est à dire déterminer le plus petit entier p tel que pour tout entier $n \geq p$, $2000 \times 1,015^n > 3000$

```

INITIALISATION :
A = 2000 ;
I = 0;
TRAITEMENT :
TANT_QUE A ≤ 3000 FAIRE
|   I prend la valeur I + 1 ;
|   A prend la valeur 1,015 × A ;
FIN TANT_QUE
SORTIE :
Afficher I
  
```

La calculatrice affiche 28. Donc pour tout entier $n \geq 28$, $2000 \times 1,015^n > 3000$.

III SUITES ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUES

1 DÉFINITION

Soient a et b deux réels.

La suite (u_n) définie pour tout entier n , par la relation de récurrence $u_{n+1} = au_n + b$ et de terme initial u_0 est une suite *arithmético-géométrique*

REMARQUE

- Si $a = 1$ la suite est arithmétique.
- Si $b = 0$ la suite est géométrique.
- Dans les autres cas, la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.

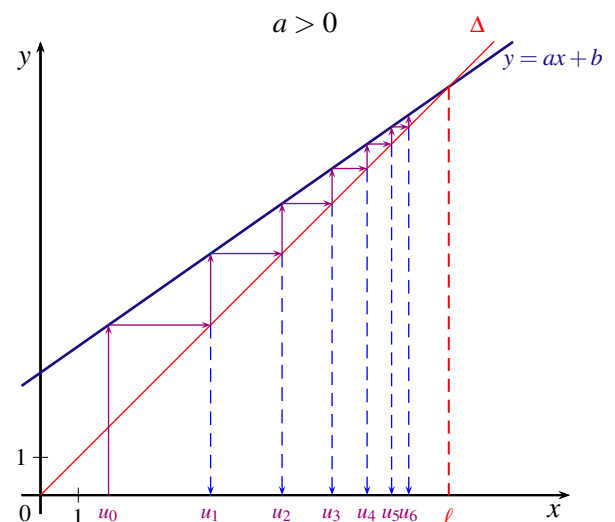
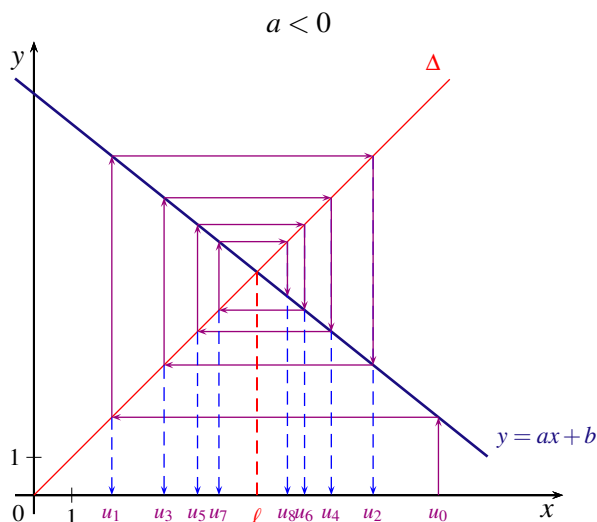
2 ÉTUDIER UNE SUITE ARITHMÉTICO-GÉOMÉTRIQUE

a et b sont deux réels tels que $a \neq 1$ et $b \neq 0$.

(u_n) est la suite arithmético-géométrique définie par u_0 et pour tout entier n , $u_{n+1} = au_n + b$.

REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

On trace la courbe représentative de la fonction affine $f : x \mapsto ax + b$ et la droite Δ d'équation $y = x$



Le graphique permet d'obtenir un certain nombre de conjectures à propos de la monotonie ou de la convergence de la suite.

UNE SUITE AUXILIAIRE

PROPOSITION

Soit ℓ le réel tel que $\ell = al + b$. La suite (v_n) définie pour tout entier n , par $v_n = u_n - \ell$ est géométrique.

* PREUVE

Pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \ell \\ &= au_n + b - \ell \\ &= au_n + b - (al + b) \\ &= au_n - al \\ &= a \times (u_n - \ell) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier n , $v_n = a \times v_{n-1}$ donc (v_n) est une suite géométrique de raison a .

CONSÉQUENCE

(v_n) est une suite géométrique de raison a et $v_0 = u_0 - \ell$ donc pour tout entier n , $v_n = (u_0 - \ell) \times a^n$.

Comme $v_n = u_n - \ell \iff u_n = v_n + \ell$, on en déduit que :

Pour tout entier n , $u_n = \ell + a^n (u_0 - \ell)$.

EXEMPLE

Chloé dépose 1000 € sur un compte d'épargne rémunéré au taux mensuel de 0,2% et choisit d'y ajouter à la fin de chaque mois la somme de 250 €. On note u_n le montant, en euros, du capital acquis au bout de n mois.

1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .

Le coefficient multiplicateur associé à un taux d'intérêt de 0,2% est 1,002.

Donc pour tout entier n , $u_{n+1} = 1,002 \times u_n + 250$

2. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier n , par $v_n = u_n + 125000$. Montrer que v_n est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 125000 \\ &= 1,002 \times u_n + 125250 \\ &= 1,002 \times (u_n + 125000) \\ &= 1,002 \times v_n \end{aligned}$$

Ainsi, (v_n) est une suite géométrique de raison 1,002 et de premier terme $v_0 = 1000 + 125000 = 126000$.

3. Exprimer u_n en fonction de n .

(v_n) est une suite géométrique de raison 1,002 et de premier terme $v_0 = 126000$ donc pour tout entier n ,
 $v_n = 126000 \times 1,002^n$.

Donc pour tout entier n , $u_n = 126000 \times 1,002^n - 125000$.

4. Étude de la suite (u_n) .

a) Variation

Pour tout entier n , $u_n = 126000 \times 1,002^n - 125000$.

Donc pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (126000 \times 1,002^{n+1} - 125000) - (126000 \times 1,002^n - 125000) \\ &= 126000 \times 1,002^{n+1} - 126000 \times 1,002^n \\ &= 126000 \times 1,002^n \times (1,002 - 1) \\ &= 252 \times 1,002^n \end{aligned}$$

D'où $u_{n+1} - u_n > 0$. Par conséquent, la suite (u_n) est strictement croissante.

b) Limite

Comme $1,002 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,002^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 126000 \times 1,002^n - 125000 = +\infty$.

c) Combien de mois sont nécessaires pour que le montant du capital disponible dépasse 15000 € ?

On cherche à déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n > 15000$.

L'algorithme suivant permet d'obtenir le seuil à partir duquel le terme général de la suite (u_n) est supérieur à 15000.

```
A = 1000 ; I = 0;
TANT_QUE A ≤ 15000 FAIRE
|   I prend la valeur I + 1 ;
|   A prend la valeur 1,002 × A + 250 ;
FIN TANT_QUE
Afficher I
```

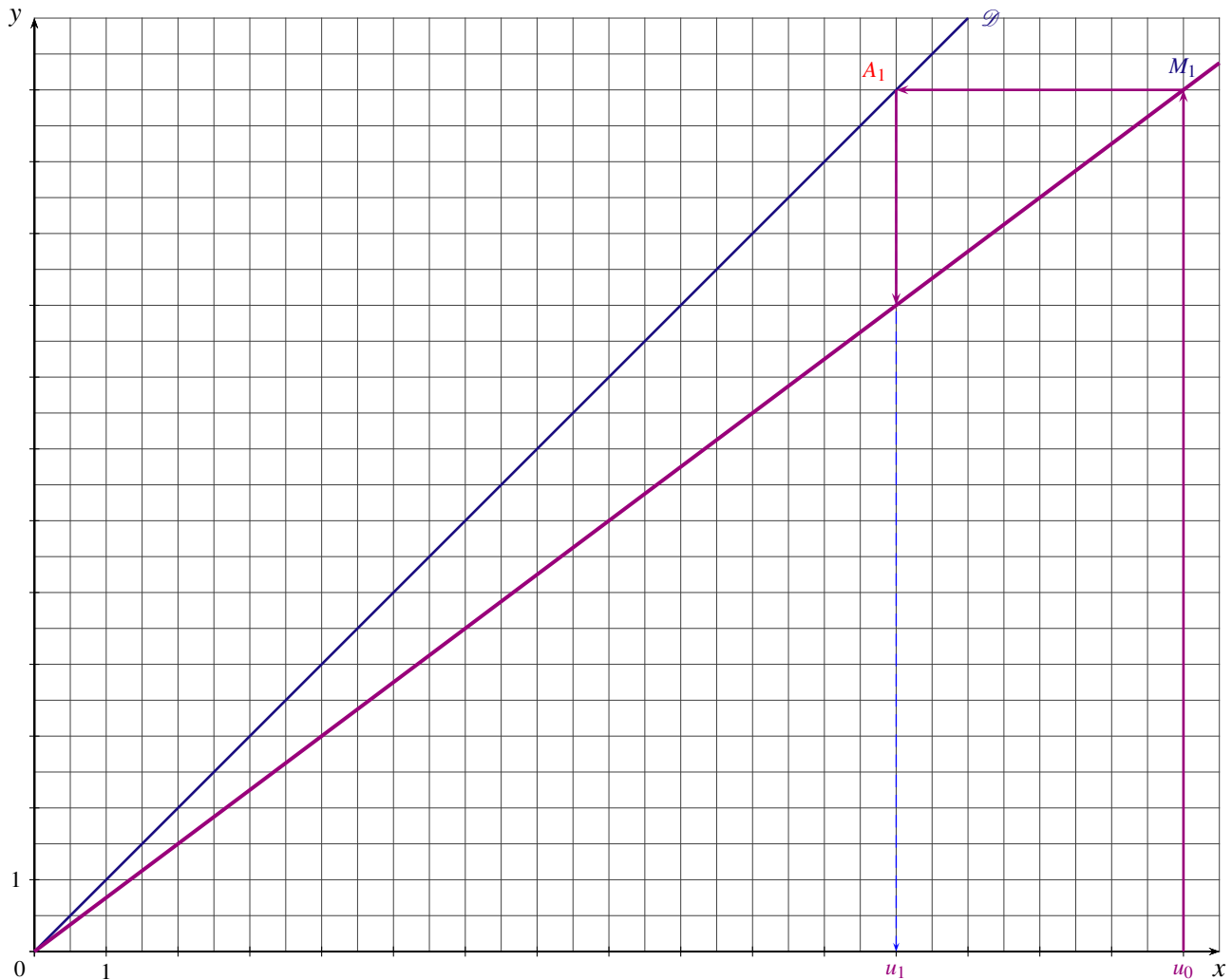
La calculatrice affiche 53. Donc le capital disponible dépassera 15000 € au bout de 53 mois.

EXERCICE 1

Soit (u_n) la suite définie par : $u_0 = 16$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{3}{4} \times u_n$.

PARTIE A

1. a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
b) Exprimer, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n .
c) Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
2. On a tracé ci-dessous dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 0,75x$ et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.



- a) Construire sur le graphique les termes de la suite $u_2, u_3, \dots, u_{10}$.
- b) Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?
3. On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont l'entier naturel N et le réel U .
 Initialisation : Affecter à N la valeur 0
 Affecter à U la valeur 16
 Traitement : TANT QUE $U > 0,01$
 Affecter à N la valeur $N + 1$
 Affecter à U la valeur $0,75 \times U$
 FIN TANT QUE
 Sortie : Afficher N

Par rapport à la suite (u_n) , quelle est la signification de l'entier N affiché ?

PARTIE B

On note S_n la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite u_n :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

1. Calculer S_4 .
2. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche la valeur de la somme S_n pour un n donné.

Les variables sont l'entier naturel N , les réels U et S .

Initialisation : Affecter à U la valeur ...
Affecter à S la valeur ...

Entrée : Saisir la valeur de l'entier naturel N

Traitement : POUR i variant de 1 à N

 U prend la valeur ...
 S prend la valeur ...

FIN POUR

Sortie : Afficher ...

3. a) Montrer que pour tout entier n , $S_n = 64(1 - 0,75^{n+1})$.
- b) Vers quel réel tend S_n quand n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 2

Soit (u_n) la suite géométrique définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{8}{5} \times u_n$.

1. a) Exprimer, pour tout entier naturel n , u_n en fonction de n .
- b) Étudier le sens de variation de la suite (u_n) .
2. a) Dans le plan muni d'un repère orthonormé, utiliser les droites d'équations $y = x$ et $y = 1,6x$ pour construire les huit premiers termes de la suite (u_n) .
- b) Que peut-on conjecturer à propos de la limite de la suite (u_n) ?
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier n tel que $u_n \geq 5000$.
4. On considère la suite (S_n) définie pour tout entier n par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}.$$

- a) Calculer S_4 .
- b) Exprimer S_n en fonction de n .
- c) La suite (S_n) est-elle convergente ?

EXERCICE 3

Le premier jour de chaque mois on effectue un versement de 300 € sur un compte épargne dont le taux d'intérêt mensuel est égal à 0,1 %.

Quelle est la somme disponible au terme du 12^e mois ?

EXERCICE 4

En 2012, la population d'une ville était de 40 000 habitants. Une étude portant sur l'évolution démographique, a permis d'établir que chaque année, 8 % des habitants quittent la ville et 4 000 nouvelles personnes emménagent. On note u_n le nombre de milliers d'habitants de cette ville l'année 2012 + n ; on a donc $u_0 = 40$.

1. Selon ce modèle, à combien peut-on évaluer la population de cette ville en 2013 ?
2. Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,92 \times u_n + 4$.
3. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation :	Affecter à N la valeur 0 Affecter à U la valeur 40		
Traitement :	Tant_que $U \leq 44$: <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>Affecter à N la valeur $N + 1$</td> </tr> <tr> <td>Affecter à U la valeur $0,92 \times U + 4$</td> </tr> </table> Fin Tant_que	Affecter à N la valeur $N + 1$	Affecter à U la valeur $0,92 \times U + 4$
Affecter à N la valeur $N + 1$			
Affecter à U la valeur $0,92 \times U + 4$			
Sortie :	Afficher N		

Recopier et compléter le tableau suivant autant que nécessaire en arrondissant les résultats au millièmes près. Quel nombre obtient-on en sortie de l'algorithme ? Interpréter ce résultat.

N	0	1	...	
U	40		...	
Test $U \leq 44$	Vrai		...	

4. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 50$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b) Exprimer v_n en fonction de n . En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 50 - 10 \times 0,92^n$.
5. Étudier la monotonie de la suite u_n .
6. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat.

EXERCICE 5

Une revue spécialisée est diffusée uniquement par abonnement.

En 2010, il y avait 40 mille abonnés à cette revue. Depuis cette date, on a remarqué que chaque année 85 % des abonnés renouvellent leur abonnement et 12 mille nouvelles personnes souscrivent un abonnement.

On note a_n le nombre de milliers d'adhérents pour l'année $2010 + n$; on a donc $a_0 = 40$.

1. Pour tout entier naturel n , exprimer a_{n+1} en fonction de a_n .
2. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n et S sont des entiers naturels A est un réel.		
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de S		
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0 Affecter à A la valeur 40		
Traitement :	Tant_que $A \leq S$: <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>Affecter à n la valeur $n + 1$</td> </tr> <tr> <td>Affecter à A la valeur $0,85 \times A + 12$</td> </tr> </table> Fin Tant_que	Affecter à n la valeur $n + 1$	Affecter à A la valeur $0,85 \times A + 12$
Affecter à n la valeur $n + 1$			
Affecter à A la valeur $0,85 \times A + 12$			
Sortie :	Afficher n		

L'utilisateur saisit en entrée le nombre $S = 65$.

Recopier et compléter le tableau suivant autant que nécessaire en arrondissant les résultats au millièmes près. Quel nombre obtient-on en sortie ? Interpréter ce résultat.

n	0	1	...	
A	40		...	
Test $A \leq S$	Vrai		...	

3. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = a_n - 80$ pour tout $n \geq 0$.

- Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- Démontrer que, pour tout entier naturel n , $a_n = 80 - 40 \times 0,85^n$.
- Selon ce modèle, le directeur de cette revue peut-il envisager de la diffuser à 90 mille exemplaires ?

EXERCICE 6

(D'après sujet bac 2016)

Un centre de vacances possède une piscine de 600 m^3 soit 600 000 litres. L'eau du bassin contient du chlore qui joue le rôle de désinfectant. Toutefois le chlore se dégrade et 25 % de celui-ci disparaît chaque jour, en particulier sous l'effet des ultra-violets et de l'évaporation.

Le 31 mai à 9 h, le responsable analyse l'eau du bassin à l'aide d'un kit distribué par un magasin spécialisé.

Le taux de chlore disponible dans l'eau est alors de 1,25 mg/L (milligrammes par litre).

DOCUMENT

Réglementation des piscines publiques		
Paramètres contrôlés	Seuils de qualité réglementaire	Incidences sur la qualité de l'eau
Présence de Chlore	Au minimum 2 mg/L	< 2 mg/L : sous chloration Risque de prolifération bactérienne dans l'eau
	Au maximum 4 mg/L	> 4 mg/L : surchloration Irritation de la peau
Source : Agence Régionale de Santé		

À partir du 1^{er} juin pour compenser la perte en chlore, la personne responsable de l'entretien ajoute, chaque matin à 9 h, 570 g de chlore dans la piscine.

Pour le bien-être et la sécurité des usagers, le responsable souhaite savoir si cet apport journalier en chlore permettra de maintenir une eau qui respecte la réglementation donnée par l'Agence Régionale de Santé pour les piscines publiques.

PARTIE A

- Pour tout entier naturel n on note u_n la quantité de chlore disponible, exprimée en grammes, présente dans l'eau du bassin le $n^{\text{ième}}$ jour suivant le jour de l'analyse, immédiatement après l'ajout de chlore. Ainsi u_0 est la quantité de chlore le 31 mai à 9 h et u_1 est la quantité de chlore le 1^{er} juin à 9 h après l'ajout de chlore.
 - Montrer que la quantité de chlore, en grammes, présente dans l'eau du bassin le 31 mai à 9 h est $u_0 = 750$.
Au regard des recommandations de l'agence régionale de santé, le responsable pouvait-il donner l'accès à la piscine le 31 mai ?
 - Montrer que $u_1 = 1132,5$.
 - Justifier que pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75u_n + 570$.
 - La suite (u_n) est-elle géométrique ?
- Soit l'algorithme ci-dessous :

Variables
u : un nombre réel
N : un nombre entier naturel
k : un nombre entier naturel
Initialisation
Saisir la valeur de N
u prend la valeur 750
Traitement
Pour k allant de 1 à N
u prend la valeur $0,75u + 570$
Fin du Pour
Sortie
Afficher u

- a) Quel est le rôle de cet algorithme ?
- b) Recopier et compléter le tableau suivant, par des valeurs exactes, en exécutant cet algorithme « pas à pas » pour $N = 3$:

Variables	Initialisation	Etape 1	Etape 2	Etape 3
u	750			

Au regard des recommandations de l'agence régionale de santé, au bout de combien de jours la piscine peut-elle être ouverte ?

- c) Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de la quantité de chlore le 15^{ième} jour juste après l'ajout de chlore.

PARTIE B

Au fil du temps, la quantité de chlore évolue. On note d_n l'écart de quantité de chlore d'un jour à l'autre en grammes. Pour tout entier naturel n , on a $d_n = u_{n+1} - u_n$.

- a) Calculer d_0 , d_1 et d_2 . On donnera une valeur exacte.
b) Justifier que d_0 , d_1 et d_2 semblent être les termes d'une suite géométrique.
- Vérifier que $u_{n+1} - u_n = -0,25u_n + 570$.
- Démontrer que la suite (d_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
a) Justifier que $d_n = 382,5 \times 0,75^n$.
b) En déduire que pour tout entier naturel n , on a $u_n = 2280 - 1530 \times 0,75^n$.
c) Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter le résultat trouvé.

EXERCICE 7

(D'après sujet bac Polynésie 2013)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0 = 8 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 0,4u_n + 3.$$

- Calculer u_1 et u_2 .

On utilise un tableur pour calculer les premiers termes de cette suite.

Une copie d'écran sur laquelle les termes u_1 et u_2 ont été effacés est donnée ci-dessous.

	A	B
1	n	$u(n)$
2	0	8
3	1	
4	2	
5	3	5,192
6	4	5,076 81
7	5	5,030 72
8	6	5,012 288
9	7	5,004 915 2
10	8	5,001 966 08

- Quelle formule a-t-on pu saisir dans la cellule B3 de la feuille de calcul afin d'obtenir les premiers termes de cette suite par recopie vers le bas ?
- En utilisant cette copie d'écran, que peut-on conjecturer sur la limite de la suite (u_n) ?
- On considère l'algorithme suivant :

Les variables sont l'entier naturel N et le réel U .

Initialisation : Affecter à N la valeur 0
Affecter à U la valeur 8

Traitement : TANT QUE $U - 5 > 0,01$
Affecter à N la valeur $N + 1$
Affecter à U la valeur $0,4U + 3$
Fin TANT QUE

Sortie : Afficher N

Par rapport à la suite (u_n) , quelle est la signification de l'entier N affiché ?

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - 5$.
- Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - Exprimer v_n en fonction de n .
 - Déterminer la limite de la suite (v_n) .
 - Le résultat précédent permet-il de valider la conjecture faite à la question 3 ? Pourquoi ?

EXERCICE 8

(D'après sujet bac Antilles Guyane 2015)

En 2010, un opérateur de téléphonie mobile avait un million de clients. Depuis, chaque année, l'opérateur perd 10 % de ses clients, mais regagne dans le même temps 60 000 nouveaux clients.

1. a) On donne l'algorithme ci-dessous. Expliquer ce que l'on obtient avec cet algorithme.

VARIABLES : k , NbClients

TRAITEMENT : Affecter à k la valeur 0
Affecter à NbClients la valeur 1 000 000
Tant que $k < 8$
 Affecter à k la valeur $k + 1$
 Affecter à NbClients la valeur $0,9 \times \text{NbClients} + 60\,000$
 Afficher NbClients
Fin Tant que

- b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous avec toutes les valeurs affichées pour k de 0 jusqu'à 5.

k	0	1	2	3	4	5
NbClients						

2. En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n , par :

$$\begin{cases} U_0 &= 1\,000 \\ U_{n+1} &= 0,9U_n + 60. \end{cases}$$

Le terme U_n donne une estimation du nombre de clients, en millier, pour l'année $2010 + n$.

Pour étudier la suite (U_n) , on considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - 600$.

- Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison 0,9.
 - Déterminer l'expression de V_n en fonction de n .
 - Montrer que pour tout entier naturel n , on a $U_n = 400 \times 0,9^n + 600$.
 - Montrer que la suite (U_n) est décroissante. Interpréter le résultat dans le contexte de ce problème.
3. À la suite d'une campagne publicitaire conduite en 2013, l'opérateur de téléphonie observe une modification du comportement de ses clients.

Chaque année à compter de l'année 2014, l'opérateur ne perd plus que 8 % de ses clients et regagne 100 000 nouveaux clients.

On admet que le nombre de clients comptabilisés en 2014 était égal à 860 000.

En supposant que cette nouvelle évolution se poursuive durant quelques années, déterminer le nombre d'années nécessaire pour que l'opérateur retrouve au moins un million de clients.

EXERCICE 9

(D'après sujet bac Centres étrangers 2015)

Depuis le 1^{er} janvier 2015, une commune dispose de vélos en libre service. La société Bicycl'Aime est chargée de l'exploitation et de l'entretien du parc de vélos.

La commune disposait de 200 vélos au 1^{er} janvier 2015.

La société estime que, chaque année, 15 % des vélos sont retirés de la circulation à cause de dégradations et que 42 nouveaux vélos sont mis en service.

On modélise cette situation par une suite (u_n) où u_n représente le nombre de vélos de cette commune au 1^{er} janvier de l'année 2015 + n .

- Déterminer le nombre de vélos au 1^{er} janvier 2016.
- Justifier que la suite (u_n) est définie par $u_0 = 200$ et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = 0,85u_n + 42$.
- On donne l'algorithme suivant :

VARIABLES :	N entier U réel
INITIALISATION :	N prend la valeur 0 U prend la valeur 200
TRAITEMENT :	Tant que $N < 4$ U prend la valeur $0,85 \times U + 42$ N prend la valeur $N + 1$ Fin Tant que
SORTIE :	Afficher U

- a) Recopier et compléter le tableau suivant en arrondissant les résultats à l'unité. Quel nombre obtient-on à l'arrêt de l'algorithme ?

U	200				
N	0	1	2	3	4
Condition $N < 4$	Vrai				

- b) Interpréter la valeur du nombre U obtenue à l'issue de l'exécution de cet algorithme.
- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n - 280$.
 - Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 0,85 et de premier terme $v_0 = -80$.
 - Pour tout entier naturel n , exprimer v_n en fonction de n .
 - En déduire que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = -80 \times 0,85^n + 280$.
 - Calculer la limite de la suite (u_n) et interpréter ce résultat.
 - La société Bicycl'Aime facture chaque année à la commune 300 € par vélo en circulation au 1^{er} janvier. Déterminer le coût total pour la période du 1^{er} janvier 2015 au 31 décembre 2019, chacun des termes utilisés de la suite (u_n) étant exprimé avec un nombre entier.

EXERCICE 10

En raison de l'évaporation, une piscine perd chaque semaine 3 % de son volume d'eau.

On remplit ce bassin avec 90 m³ d'eau et, pour compenser la perte due à l'évaporation, on décide de rajouter chaque semaine 2,4 m³ d'eau dans le bassin.

- Calculer le volume d'eau contenu dans ce bassin au bout de deux semaines.
- On note u_n le nombre de m³ d'eau contenu dans ce bassin au bout de n semaines. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
- On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 80$.
 - Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - Exprimer v_n en fonction de n . En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 80 + 10 \times 0,97^n$.

4. Étudier la monotonie de la suite u_n .
5. Déterminer la limite de la suite (u_n) . Interpréter ce résultat.

EXERCICE 11

(D'après sujet bac Pondichéry 2014)

Une association décide d'ouvrir un centre de soin pour les oiseaux sauvages victimes de la pollution. Leur but est de soigner puis relâcher ces oiseaux une fois guéris.

Le centre ouvre ses portes le 1^{er} janvier 2013 avec 115 oiseaux.

Les spécialistes prévoient que 40 % des oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier d'une année restent présents le 1^{er} janvier suivant et que 120 oiseaux nouveaux sont accueillis dans le centre chaque année.

On s'intéresse au nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier des années suivantes.

La situation peut être modélisée par une suite (u_n) admettant pour premier terme $u_0 = 115$, le terme u_n donnant une estimation du nombre d'oiseaux l'année $2013 + n$.

1. Calculer u_1 et u_2 . Avec quelle précision convient-il de donner ces résultats ?
2. Les spécialistes déterminent le nombre d'oiseaux présents dans le centre au 1^{er} janvier de chaque année à l'aide d'un algorithme.
 - a) Parmi les trois algorithmes proposés ci-dessous, seul l'algorithme 3 permet d'estimer le nombre d'oiseaux présents au 1^{er} janvier de l'année $2013 + n$.

Expliquer pourquoi les deux premiers algorithmes ne donnent pas le résultat attendu.

Variables :
 U est un nombre réel
 i et N sont des nombres entiers
Début
Saisir une valeur pour N
Affecter 115 à U
Pour i de 1 à N faire
 Affecter $0,6 \times U + 120$ à U
Fin Pour
Afficher U
Fin

algorithme 1

Variables :
 U est un nombre réel
 i et N sont des nombres entiers
Début
Saisir une valeur pour N
Pour i de 1 à N faire
 Affecter 115 à U
 Affecter $0,4 \times U + 115$ à U
Fin Pour
Afficher U
Fin

algorithme 2

Variables :
 U est un nombre réel
 i et N sont des nombres entiers
Début
Saisir une valeur pour N
Affecter 115 à U
Pour i de 1 à N faire
 Affecter $0,4 \times U + 120$ à U
Fin Pour
Afficher U
Fin

algorithme 3

- b) Donner, pour tout entier naturel n , l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n .
3. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 200$.
 - a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,4. Préciser v_0 .
 - b) Exprimer, pour tout entier naturel n , v_n en fonction de n .
 - c) En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = 200 - 85 \times 0,4^n$.
 - d) La capacité d'accueil du centre est de 200 oiseaux. Est-ce suffisant ? Justifier la réponse.
4. Chaque année, le centre touche une subvention de 20 euros par oiseau présent au 1^{er} janvier.
Calculer le montant total des subventions perçues par le centre entre le 1^{er} janvier 2013 et le 31 décembre 2018 si l'on suppose que l'évolution du nombre d'oiseaux se poursuit selon les mêmes modalités durant cette période.

Chapitre 2

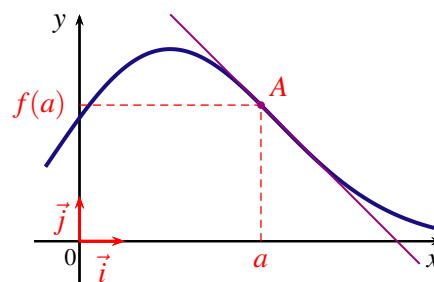
DÉRIVATION, CONTINUITÉ ET CONVEXITÉ

I	DÉRIVÉES	24
1	Tangente à une courbe	24
2	Dérivées des fonctions de référence	24
3	Dérivées et opérations	24
4	Dérivée et variations d'une fonction	25
	exemple	26
II	CONTINUITÉ ET ÉQUATION	27
1	Notion de continuité	27
2	Propriétés	27
III	CONTINUITÉ ET ÉQUATION	28
1	Théorème des valeurs intermédiaires	28
IV	CONVEXITÉ	29
1	Fonction convexe, fonction concave	29
2	Point d'inflexion	30
	EXERCICES	32

I DÉRIVÉES

1 TANGENTE À UNE COURBE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , dérivable en a où a est un réel de I , et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan. La droite passant par le point $A(a; f(a))$ de la courbe C_f et de coefficient directeur $f'(a)$ est appelée la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse a .



Soit f une fonction définie sur un intervalle I , dérivable en a où a est un réel de I , et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

L'équation réduite de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse a est :

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

2 DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

f définie sur ...	$f(x)$	$f'(x)$	f dérivable sur ...
$\mathbb{R}$	k	0	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	$ax + b$	a	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ pour n entier $n \geq 2$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$ pour n entier $n \geq 1$
$[0; +\infty[$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

3 DÉRIVÉES ET OPÉRATIONS

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I :

$$\bullet (u + v)' = u' + v' \quad \bullet (ku)' = k \times u' \quad \bullet (uv)' = u'v + uv'$$

$$\bullet (u^2)' = 2uu' \quad \bullet \text{Si } n \text{ est un entier non nul, } (u^n)' = nu^{n-1}u'$$

Si la fonction v ne s'annule pas sur l'intervalle I (si $v(x) \neq 0$ sur I)

$$\bullet \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \quad \bullet \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

4 DÉRIVÉE ET VARIATIONS D'UNE FONCTION

THÉORÈME 1

Soit f une fonction dérivable et monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- Si f est constante sur I , alors pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) = 0$.
- Si f est croissante sur I , alors pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) \geq 0$.
- Si f est décroissante sur I , alors pour tout réel x appartenant à I , $f'(x) \leq 0$.

Le théorème suivant, permet de déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle suivant le signe de sa dérivée.

THÉORÈME 2

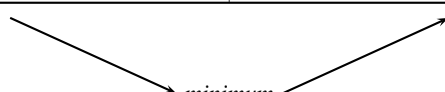
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et f' la dérivée de f sur I .

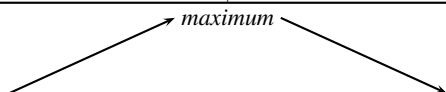
- Si f' est nulle sur I , alors f est constante sur I .
- Si f' est strictement positive sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I .
- Si f' est strictement négative sur I , sauf éventuellement en un nombre fini de points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I .

THÉORÈME 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et x_0 un réel appartenant à I .

1. Si f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.
2. Si la dérivée f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0 .

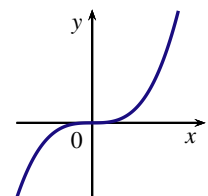
x	a	x_0	b
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$			

x	a	x_0	b
$f'(x)$	+	0	—
$f(x)$			

REMARQUES

1. Dans la proposition 2. du théorème 3 l'hypothèse **en changeant de signe** est importante.

Considérons la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ qui a pour dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 3x^2$.
 $f'(0) = 0$ et pour tout réel x non nul, $f'(x) > 0$.
 La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et n'admet pas d'extremum en 0.

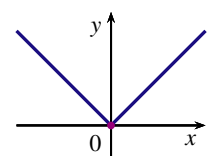


2. Une fonction peut admettre un extremum local en x_0 sans être nécessairement dérivable.

Considérons la fonction valeur absolue f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

f admet un minimum $f(0) = 0$ or f n'est pas dérivable en 0.



EXEMPLE : ÉTUDE D'UNE FONCTION

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \frac{4x-3}{x^2+1}$.

1. Calculer $f'(x)$.

Sur $\mathbb{R}$ f est dérivable comme somme et quotient de deux fonctions dérivables.

$$f = 1 - \frac{u}{v} \text{ d'où } f' = -\frac{u'v - uv'}{v^2}. \text{ Avec pour tout réel } x,$$

$$u(x) = 4x - 3 \quad \text{d'où} \quad u'(x) = 4$$

$$v(x) = x^2 + 1 \quad \text{d'où} \quad v'(x) = 2x$$

Soit pour tout réel x ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{4(x^2+1) - 2x(4x-3)}{(x^2+1)^2} \\ &= -\frac{4x^2+4-8x^2+6x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

Ainsi, f' est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = \frac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2}$

2. Étudier les variations de la fonction f

Les variations de la fonction f se déduisent du signe de sa dérivée.

$$\text{Étudions le signe de } f'(x) = \frac{4x^2-6x-4}{(x^2+1)^2} :$$

Pour tout réel x , $(x^2+1)^2 > 0$. Par conséquent, $f'(x)$ est du même signe que le polynôme du second degré $4x^2-6x-4$ avec $a=4$, $b=-6$ et $c=-4$.

Le discriminant du trinôme est $\Delta = b^2 - 4ac$ Soit

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 4 \times (-4) = 100$$

Comme $\Delta > 0$, le trinôme admet deux racines :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_1 = \frac{6-10}{8} = -\frac{1}{2} \\ \text{et } x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{Soit} \quad x_2 = \frac{6+10}{8} = 2 \end{aligned}$$

Un polynôme du second degré est du signe de a sauf pour les valeurs comprises entre les racines.

Nous pouvons déduire le tableau du signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x ainsi que les variations de la fonction f :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		5		0	

II CONTINUITÉ ET ÉQUATION

1 NOTION DE CONTINUITÉ

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

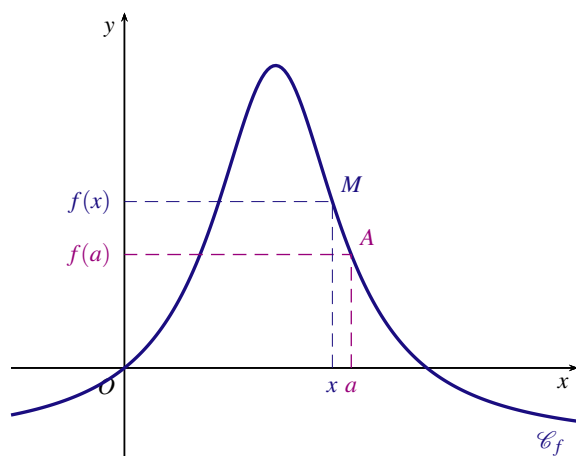
Dire que f est continue sur I signifie que sa courbe représentative peut être tracée en un seul morceau (la courbe ne présente aucun saut, aucun trou).

EXEMPLE ET CONTRE-EXEMPLE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .

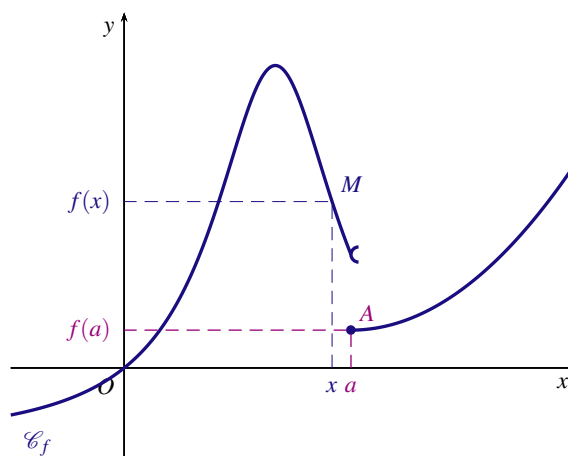
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a .

Pour tout réel x de l'intervalle I , on considère le point M de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x



La fonction f est continue.

Pour tout réel a de I , on peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de $f(a)$ pourvu que x soit suffisamment proche de a .



La fonction f n'est pas continue en a .

La courbe $\mathcal{C}_f$ présente un saut au point d'abscisse a .
Le point M n'est pas proche du point A quand x est proche de a .

2 PROPRIÉTÉS

THÉORÈME (admis)

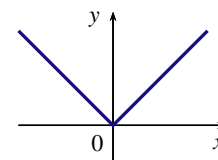
Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

REMARQUE

La réciproque du théorème est fausse :

Une fonction peut être continue en un réel a sans être dérivable en ce réel.

Par exemple la fonction valeur absolue f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.



CONSÉQUENCES

On admettra les deux propriétés suivantes :

1. Les fonctions de référence (affines, carré, cube, inverse, racine carrée) sont continues sur tout intervalle où elles sont définies.
2. Toute fonction construite algébriquement (somme, produit, inverse, quotient ou composée) à partir de fonctions de référence est continue sur tout intervalle où elle est définie.

III CONTINUITÉ ET ÉQUATION

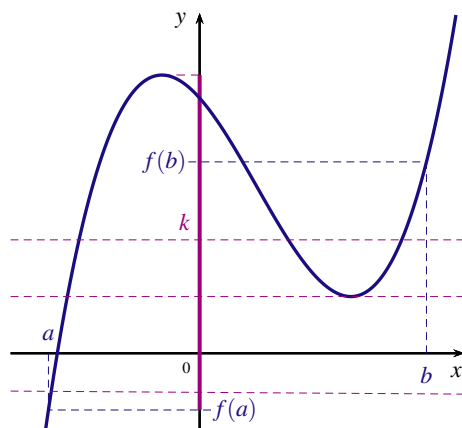
1 THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

THÉORÈME (admis)

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et continue sur I alors elle vérifie la propriété suivante :
quels que soient les réels a et b de l'intervalle I , pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c appartenant à $[a; b]$.

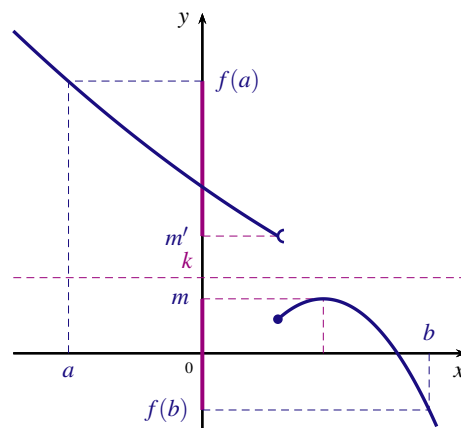
Ce théorème résulte du fait que l'image d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est un intervalle de $\mathbb{R}$.

f est continue sur I



L'image de l'intervalle $[a; b]$ est un intervalle.
Tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est l'image
d'au moins un élément de $[a; b]$.

f n'est pas continue sur I



L'image de l'intervalle $[a; b]$ n'est pas un intervalle.
Il existe des réels k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ pour
lesquels l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.

COROLLAIRE

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et a, b deux réels appartenant à I , $a < b$.
Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$,
l'équation $f(x) = k$ admet une solution **unique** c appartenant à $[a; b]$.

* DÉMONSTRATION

Soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$

1. Existence

Par hypothèse, f est continue sur $[a; b]$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution c appartenant à $[a; b]$.

2. Unicité

Supposons que l'équation $f(x) = k$ admette deux solutions distinctes c_1 et c_2 appartenant à $[a; b]$

Par hypothèse, f est strictement monotone sur $[a; b]$ alors $c_1 \neq c_2 \Rightarrow f(c_1) \neq f(c_2)$

Ce qui aboutit à une contradiction puisque $f(c_1) = f(c_2) = k$

Donc $c_1 = c_2$, ce qui prouve que l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans $[a; b]$

REMARQUES

- Si f est continue et strictement monotone sur $[a; b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $[a; b]$
- Le théorème s'applique aussi lorsque f est continue et strictement monotone sur un intervalle de la forme $[a; b]$, $]a; b]$, $[a; b[$, $]a; +\infty[$, $]a; +\infty[$, $] - \infty; b]$ ou $] - \infty; b[$.

IV CONVEXITÉ

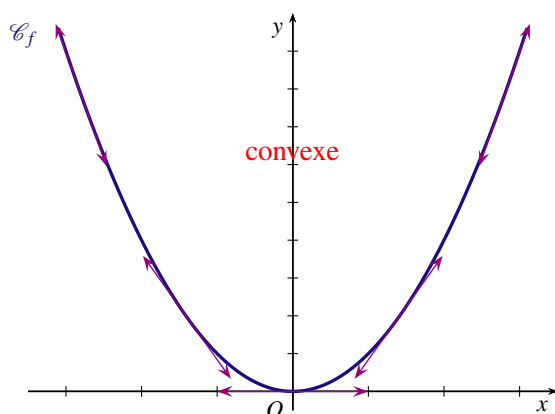
1 FONCTION CONVEXE, FONCTION CONCAVE

DÉFINITIONS

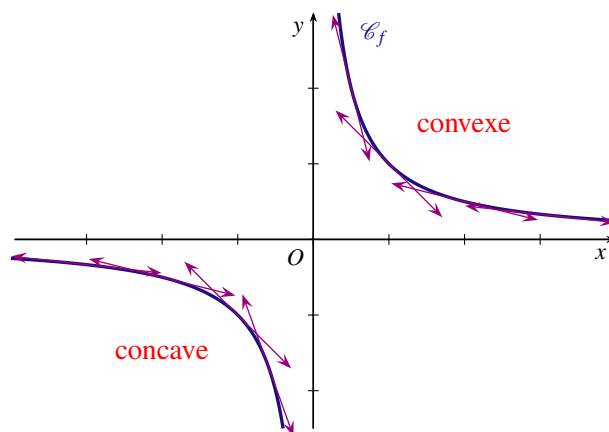
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

- Dire que la fonction f est convexe sur I signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
- Dire que la fonction f est concave sur I signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est située entièrement au-dessous de chacune de ses tangentes.

EXEMPLES



La fonction carré $x \mapsto x^2$ est convexe.

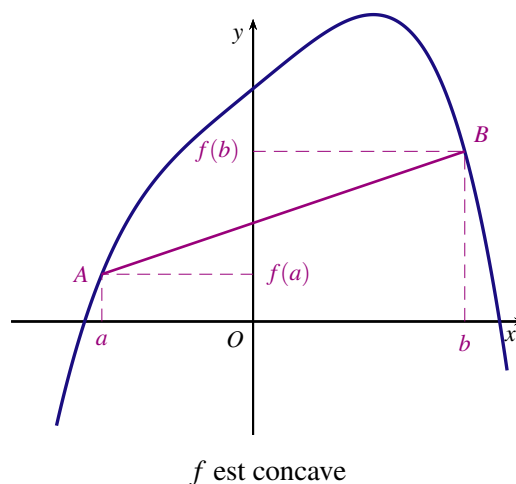
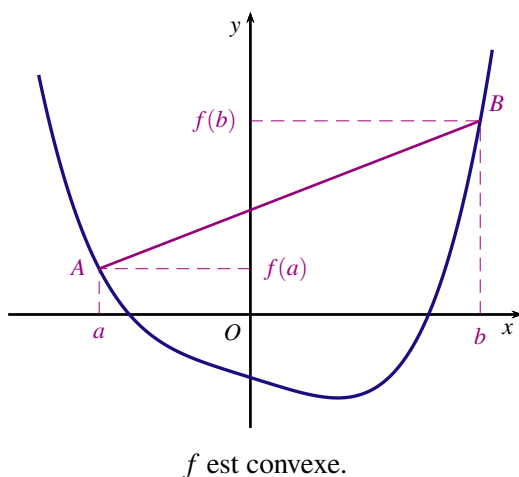


La fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ est concave sur $] -\infty; 0[$ et convexe sur $]0; +\infty[$

REMARQUE

Intuitivement, quels que soient les points A et B de la courbe $\mathcal{C}_f$

- Si le segment $[AB]$ est au-dessus de la courbe alors f est convexe.
- Si le segment $[AB]$ est au-dessous de la courbe alors f est concave.



THÉORÈME (admis)

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

- f est convexe sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est croissante sur I .
- f est concave sur I si, et seulement si, sa fonction dérivée f' est décroissante sur I .

CONSÉQUENCE

On note f'' la dérivée seconde de la fonction f , c'est à dire la dérivée de la dérivée f' .

- Si la dérivée seconde est positive alors la fonction f est convexe.
- Si la dérivée seconde est négative alors la fonction f est concave.

EXEMPLE

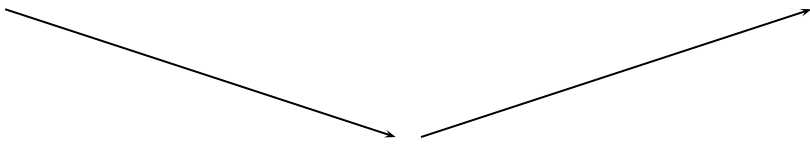
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$.

Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.

Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 20x^3 - 60x^2 = 20x^2(x - 3)$.

Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f'' .

Notons que $20x^2 \geq 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 3$. D'où le tableau :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
signe de $f''(x)$	$-$	0	$+$
variations de f'			
convexité de f	CONCAVE		CONVEXE

f est concave sur $]-\infty; 3]$ et convexe sur $[3; +\infty[$.

2 POINT D'INFLEXION

DÉFINITION

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

S'il existe un point A de la courbe $\mathcal{C}_f$ tel que la courbe traverse sa tangente en ce point, alors on dit que A est un point d'inflexion.

EXEMPLE

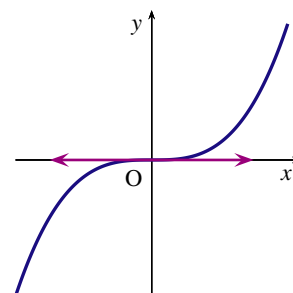
La courbe représentative de la fonction cube définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ admet comme point d'inflexion l'origine $O(0;0)$ du repère.

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction cube.

La tangente au point O à la courbe $\mathcal{C}_f$ est l'axe des abscisses d'équation $y = 0$.

- Pour $x \leq 0$, $f(x) \leq 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessous de la tangente en O sur $]-\infty; 0]$.
- Pour $x \geq 0$, $f(x) \geq 0$ donc la courbe $\mathcal{C}_f$ est au dessus de la tangente en O sur $[0; +\infty[$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente en O donc $O(0;0)$ est un point d'inflexion.



CONSEQUENCES

- En un point d'inflexion la courbe traverse sa tangente : cela signifie que la fonction change de convexité.
- Si la dérivée f' change de sens de variation en a alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a .
- Si la dérivée seconde f'' s'annule en changeant de signe en a alors la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse a .

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 5x^4$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

Sa dérivée est la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 5x^4 - 20x^3$.

Sa dérivée seconde est la fonction f'' définie sur $\mathbb{R}$ par $f''(x) = 20x^2(x - 3)$.

L'équation $f''(x) = 0$ admet deux solutions $x_1 = 0$ et $x_2 = 3$.

Notons que $20x^2 \geq 0$ donc $f''(x)$ est du même signe que $x - 3$.

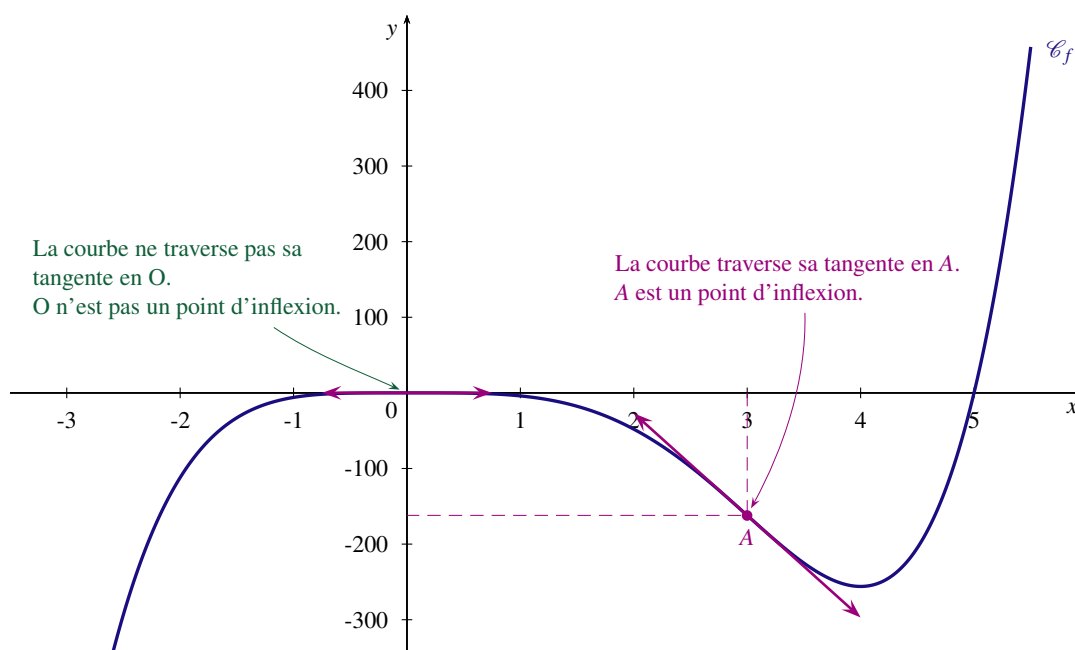
Les variations de f' se déduisent du signe de sa dérivée f'' . D'où le tableau :

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$
signe de $f''(x)$		-	0	+
variations de f'				

En tenant compte des changements de variation de la dérivée f' on en déduit que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un seul point d'inflexion, le point $A(3; f(3))$.

En effet :

- $f''(0) = 0$ mais, sur l'intervalle $] -\infty; 3]$ $f''(x) \leq 0$ donc le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0, n'est pas un point d'inflexion. (La fonction f est concave sur $] -\infty; 3]$).
- f'' s'annule en 3 en changeant de signe donc le point $A(3; -162)$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$. (La fonction f est concave sur $] -\infty; 3]$ et convexe sur $[3; +\infty[$).



EXERCICE 1

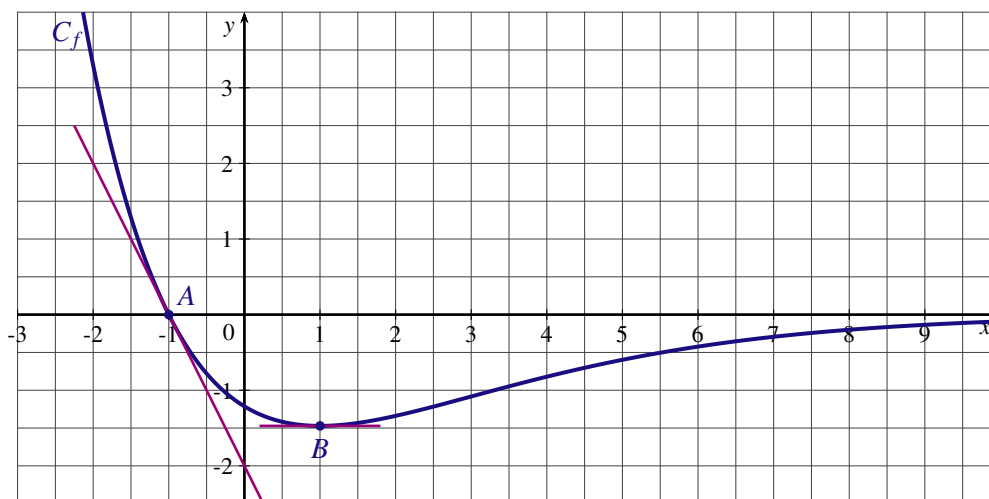
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$ par $f(x) = 8x^2 - 2x - \frac{9}{2x+3}$.

- On note f' la dérivée de la fonction f . Montrer que $f'(x) = \frac{8x(8x^2 + 23x + 15)}{(2x+3)^2}$.
- Étudier les variations de la fonction f .

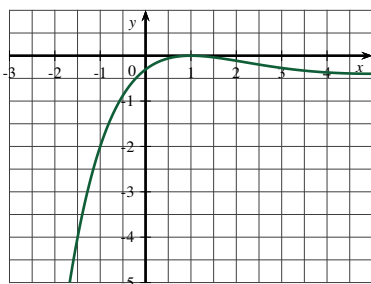
EXERCICE 2

La courbe C_f ci-dessous représente une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . On sait que :

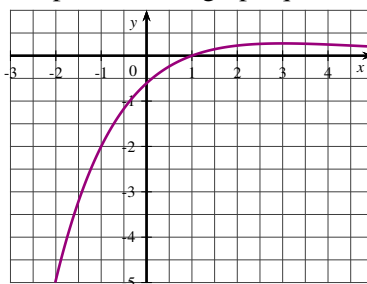
- la courbe coupe l'axe des abscisses au point A et la tangente à la courbe au point A passe par le point de coordonnées $(0; -2)$;
- la courbe admet au point B d'abscisse 1 une tangente parallèle à l'axe des abscisses;



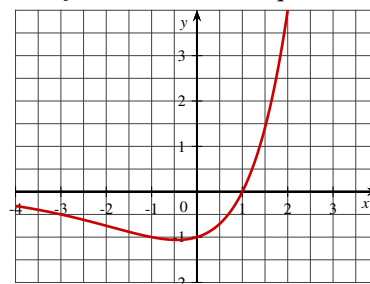
- À partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer $f'(-1)$ et $f'(1)$.
- Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' . Déterminer laquelle.



courbe C_1



courbe C_2



courbe C_3

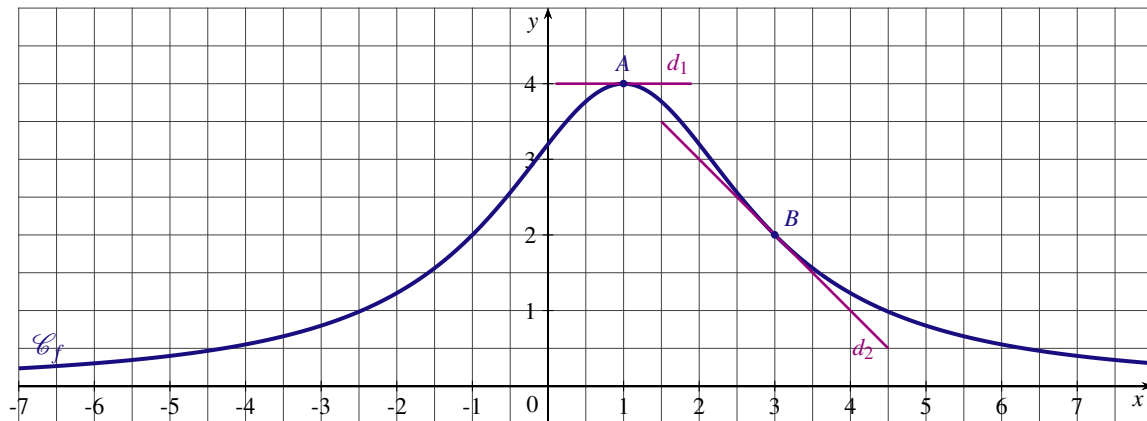
EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - x + 4}{x^2 + 3}$. On note C_f sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère.

- Calculer la dérivée de la fonction f .
- Étudier les variations de f .
- Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

EXERCICE 4

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous représente une fonction f strictement positive et dérivable sur $\mathbb{R}$.



On sait que :

- Les droites d_1 et d_2 sont tangentes à la courbe aux points A et B d'abscisses respectives 1 et 3 ;
- La tangente T à la courbe au point d'abscisse -1 a pour équation $y = x + 3$.

On note f' la dérivée de la fonction f .

1. Tracer la droite T puis, déterminer $f(-1)$ et $f'(-1)$.
2. À partir du graphique et des renseignements fournis, déterminer $f'(1)$ et $f'(3)$.
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.
 - a) Donner le tableau des variations de la fonction g .
 - b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse -1 .

EXERCICE 5

Soit f une fonction dérivable sur chacun des intervalles où elle est définie. Le tableau des variations de la fonction f est donné ci-dessous :

x	-3	1	5	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	2	$+\infty$	-1

1. a) La fonction f est-elle continue sur $] -3; +\infty[$?
- b) Donner deux intervalles où f est continue mais pas monotone.
- c) Donner deux intervalles où f est continue et strictement monotone.
2. a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
- b) L'équation $f(x) = 1$ admet-elle une solution unique ?
3. On note f' la dérivée de la fonction f . Pour chacune des affirmations ci-dessous, dire si elle est vraie ou si elle est fausse.
 - a) L'équation $f'(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]5; +\infty[$
 - b) $f'(-2) \times f'(0) \leq 0$
 - c) $f'(-2) \times f'(3) \leq 0$

EXERCICE 6

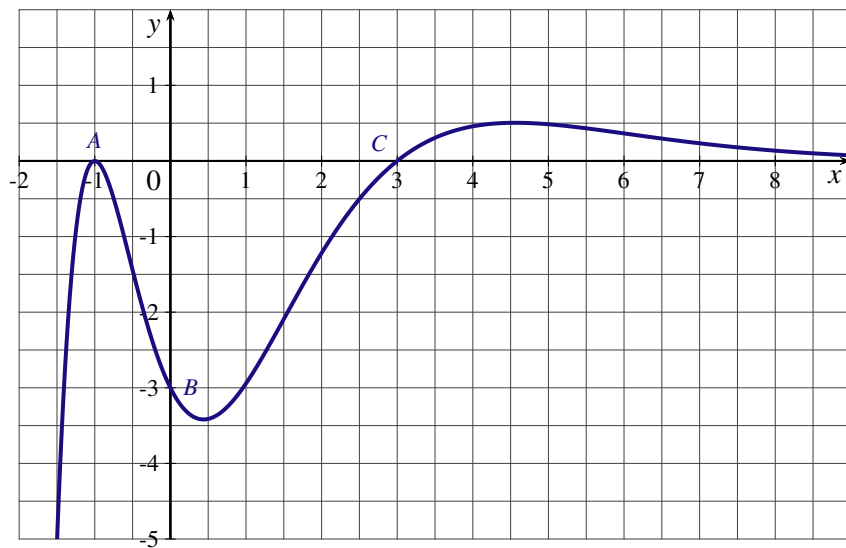
Soit f la fonction définie $\left] -\frac{1}{2}; +\infty \right[$ par $f(x) = \frac{2x^3 - 3x^2 - 2x - 1}{2x + 1}$. On note f' sa dérivée.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Donner le tableau des variations de la fonction f .
3. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.
À l'aide de la calculatrice, donner la valeur arrondie à 10^{-3} près, des solutions de l'équation $f(x) = 0$.

EXERCICE 7

On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et deux fois dérivable. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f'' , dérivée seconde de la fonction f , dans un repère orthonormé.

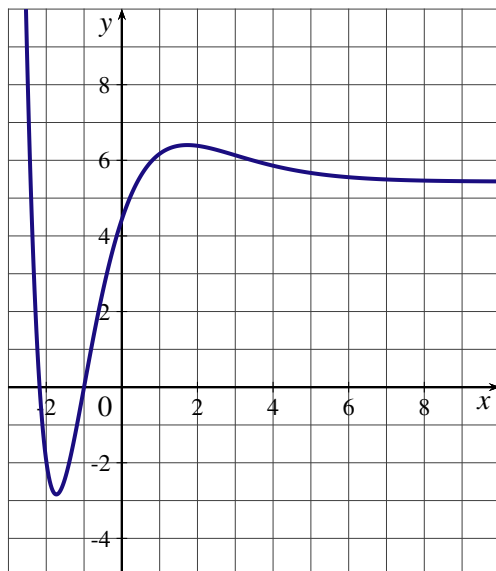
Les points $A(-1;0)$, $B(0;-3)$ et $C(3;0)$ appartiennent à la courbe.



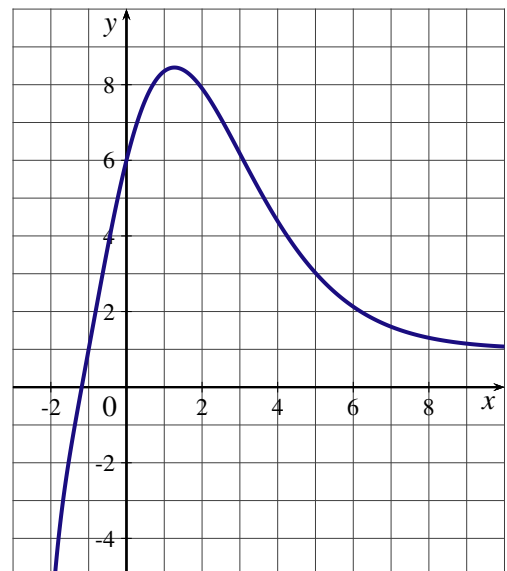
Dans cet exercice, chaque réponse sera justifiée à partir d'arguments graphiques.

1. La courbe représentative de la fonction f admet-elle des points d'inflexion ?
2. Sur quels intervalles, la fonction est-elle convexe ? Est-elle concave ?
3. Parmi les deux courbes données ci-dessous, une seule est la représentation graphique de la fonction f : laquelle ? Justifier la réponse.

Courbe 1

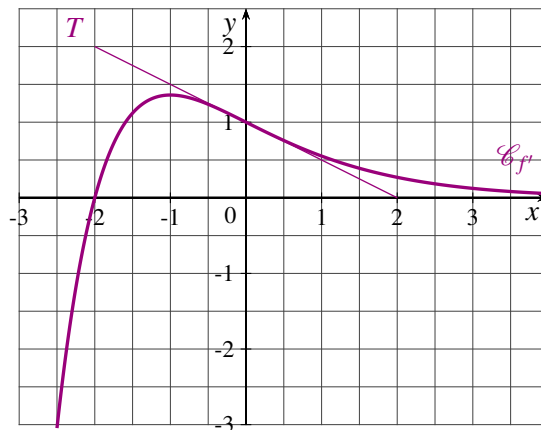


Courbe 2



EXERCICE 8

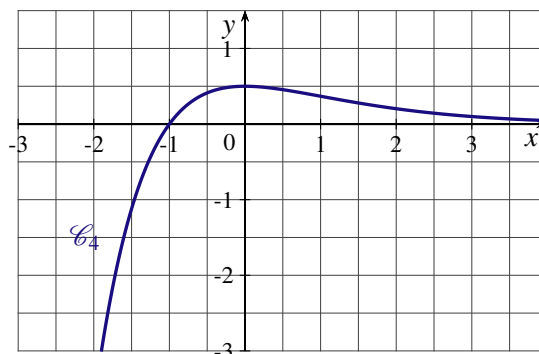
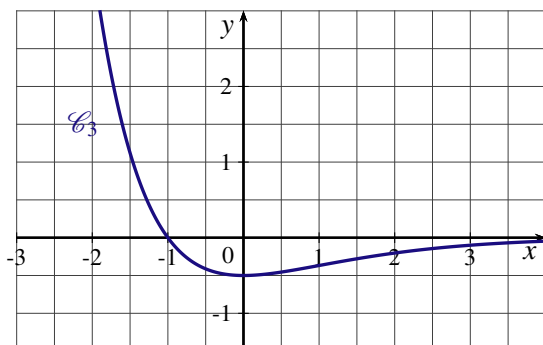
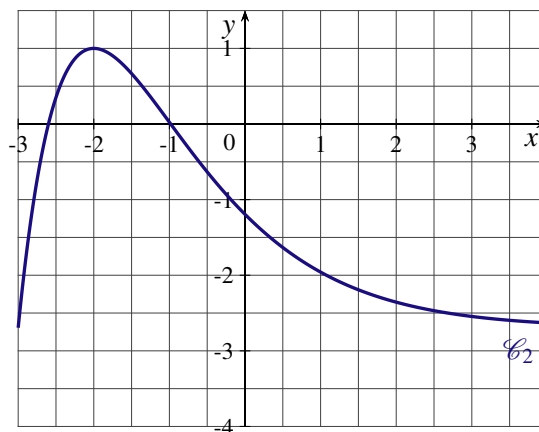
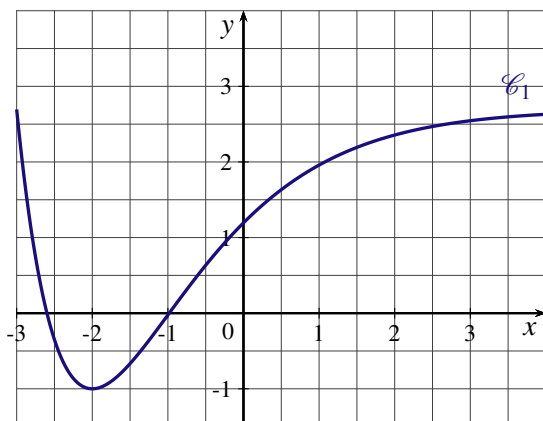
Soit f une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.
La courbe représentative de la fonction dérivée notée $\mathcal{C}_{f'}$ est donnée ci dessous.
La droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}_{f'}$ au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique :

- Résoudre $f'(x) = 0$.
- Résoudre $f''(x) = 0$.
- Déterminer $f''(0)$.

2. Une des quatre courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ ci-dessous est la courbe représentative de la fonction f et une autre la courbe représentative de la dérivée seconde f'' .



- Déterminer la courbe qui représente f et celle qui représente la dérivée seconde f'' .
- Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
- La courbe représentative de la fonction f admet-elle un point d'inflexion ?

EXERCICE 9

Le tableau ci-dessous représente l'évolution du taux d'endettement des ménages, en pourcentage du revenu disponible brut, en France de 2001 à 2010.

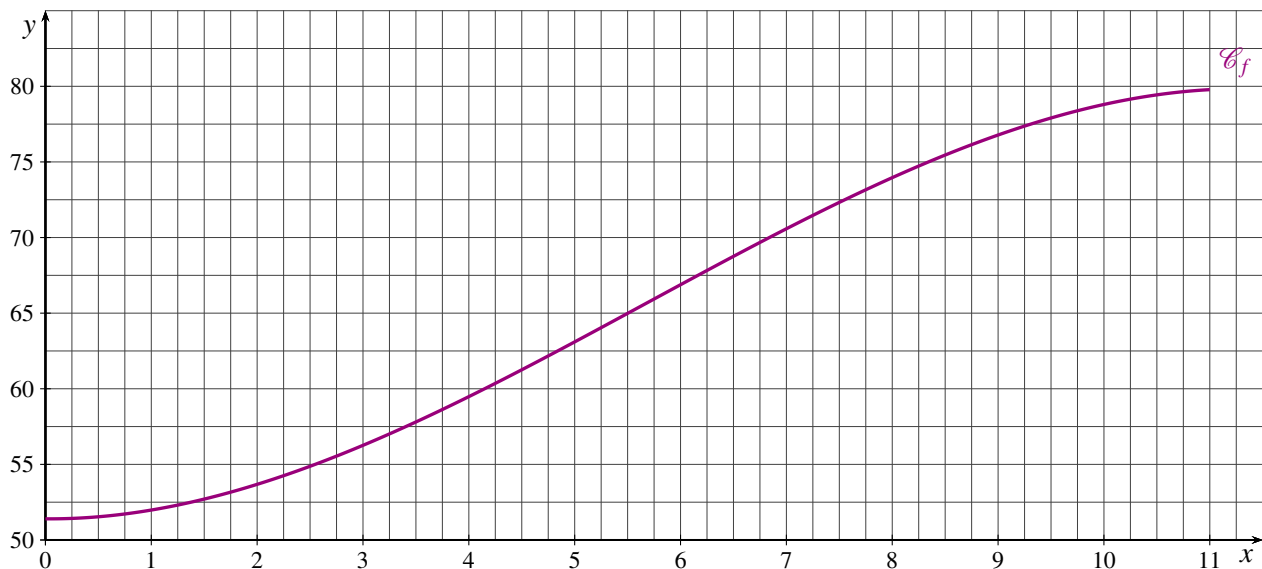
Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taux d'endettement y_i	52,2	53,2	55,6	58,6	63,4	67,4	70,9	73,5	75,7	78,9

Source : INSEE

Une estimation de l'évolution du taux d'endettement des ménages est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 11]$ par :

$$f(x) = -0,04x^3 + 0,68x^2 - 0,06x + 51,4$$

où x est le nombre d'années écoulées depuis 2000.



- Calculer la valeur estimée du taux d'endettement des ménages en 2009.
 - Calculer le pourcentage d'erreur par rapport au taux réel d'endettement des ménages en 2009.
- Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
 - Déterminer les intervalles sur lesquels f est convexe ou concave.
 - La courbe $\mathcal{C}_f$ a-t-elle un point d'inflexion ?
- Le rythme de croissance instantané du taux d'endettement est assimilé à la dérivée de la fonction f .
Au cours de quelle année, le rythme de croissance du taux d'endettement a-t-il commencé à diminuer ?

EXERCICE 10

PARTIE A

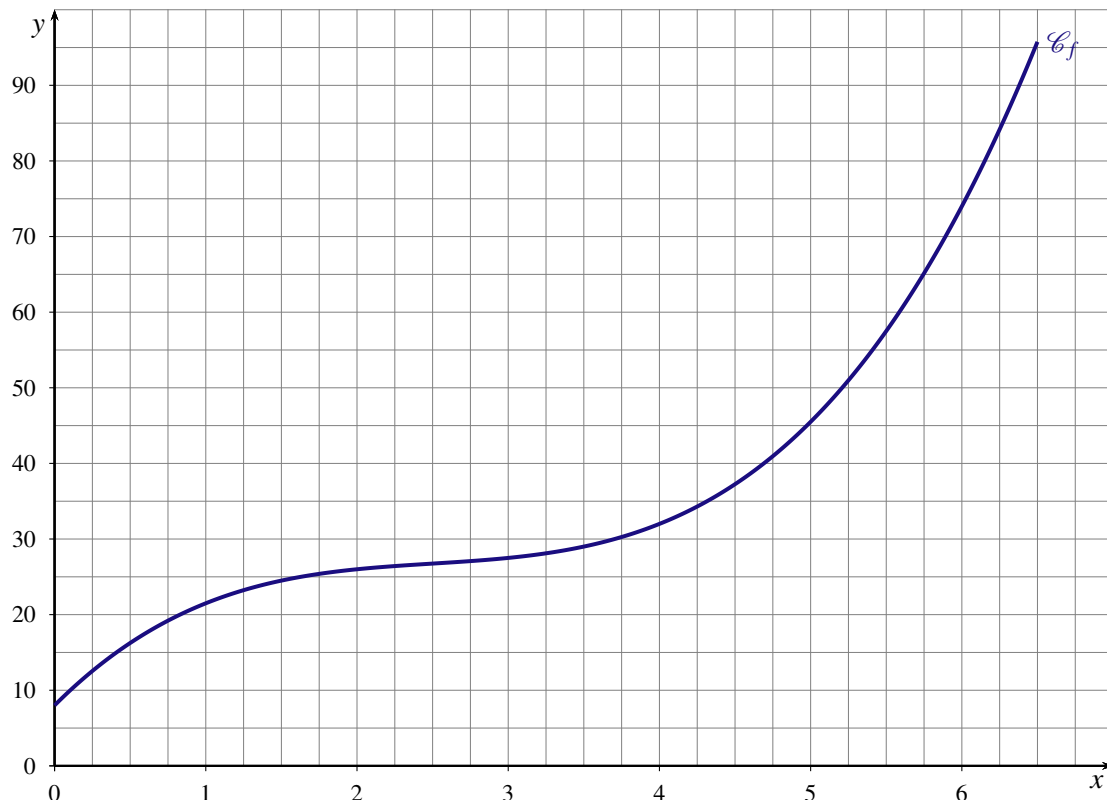
Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = x^3 - 7,5x^2 + 20x + 8$. On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan.

- Étudier les variations de la fonction f .
- Étudier la convexité de la fonction f .
 - La courbe $\mathcal{C}_f$ a-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, déterminer ses coordonnées ?

PARTIE B

La fonction f modélise sur l'intervalle $]0; 6,5]$ le coût total de production exprimé en milliers d'euros, où x désigne le nombre de milliers d'articles fabriqués par une entreprise.

La courbe représentative de la fonction coût total, sur l'intervalle $]0; 6,5]$, est donnée ci-dessous :



Le prix de vente d'un article est fixé à 13,25 €. On suppose que toute la production est vendue.

1. Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique :
 - a) l'intervalle dans lequel doit se situer la production x pour que l'entreprise réalise un bénéfice positif;
 - b) la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
2. On considère la fonction B définie sur l'intervalle $]0 ; 6,5]$ par $B(x) = 13,25x - f(x)$.
 - a) Étudier les variations de la fonction B sur $]0 ; 6,5]$.
 - b) En déduire le nombre d'articles qu'il faut fabriquer et vendre pour obtenir un bénéfice maximal. Quel est le montant en euro, de ce bénéfice maximal ?
3. Le coût marginal de fabrication pour une production de x milliers d'articles est donné par $f'(x)$ où f' est la dérivée de la fonction f .
Vérifier que si le bénéfice est maximal alors le coût marginal est égal au prix de vente d'un article.

PARTIE C

Le coût moyen de production C mesure le coût en euro par article produit.

On considère la fonction C définie sur l'intervalle $]0; 6,5]$ par $C(x) = \frac{f(x)}{x}$.

1. Soit A le point d'abscisse a de la courbe $\mathcal{C}_f$.
 - a) Montrer que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal au coût moyen $C(a)$
 - b) Conjecturer graphiquement, les variations de la fonction C
2. On désigne par C' la dérivée de la fonction C .
 - a) Montrer $C'(x) = \frac{(x-4)(2x^2 + 0,5x + 2)}{x^2}$.
 - b) Étudiez les variations de la fonction C .
 - c) En déduire le prix de vente minimal, arrondi à l'euro près, d'un article pour que l'entreprise ne travaille pas à perte ?
3. Justifier que lorsque le coût moyen est minimal, alors le coût moyen est égal au coût marginal.

Chapitre 3

FONCTION EXPONENTIELLE

ACTIVITÉS : INTRODUCTION	39
I FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE q	41
1 fonctions exponentielles $x \mapsto q^x$, avec $q > 0$	41
2 Sens de variation	42
3 Propriétés	42
II LA FONCTION EXPONENTIELLE	42
1 Définition	43
2 Dérivée de la fonction exponentielle	43
3 Variation	43
4 Courbe représentative	44
III EXPONENTIELLE D'UNE FONCTION : $\exp(u)$	45
1 Dérivée	45
2 Variation	45
EXERCICES	47

CONSTRUCTION EXPÉRIMENTALE DE LA FONCTION $f : x \mapsto q^x$, AVEC $q > 0$

Soit $q > 0$ un réel strictement positif. (u_n) est la suite géométrique définie pour tout entier n par $u_n = q^n$.
 (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme 1. Pour tous entiers naturels m et p , on a :

$$u_m \times u_p = q^m \times q^p = q^{m+p} = u_{m+p}$$

On considère le nuage de points M_i représentatif de la suite q^n .

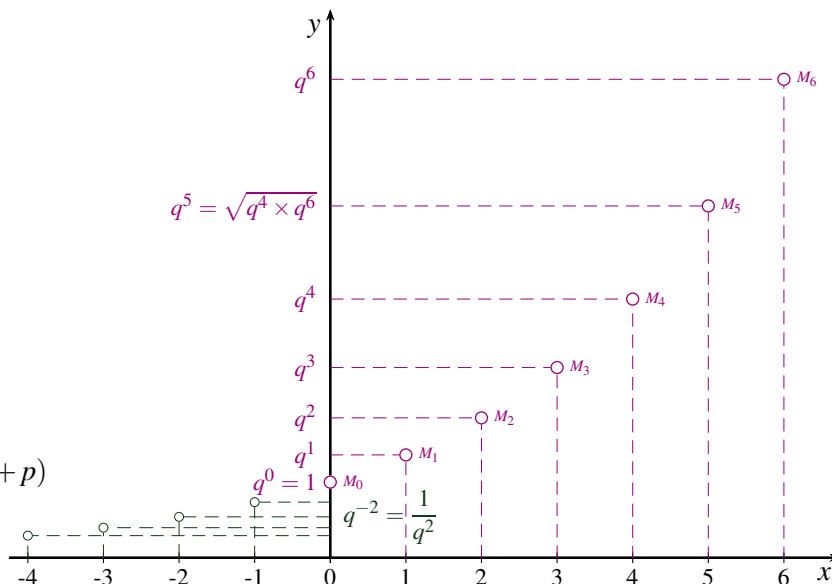
ÉTAPE 1 : prolongement sur les négatifs.

Sachant que pour tout réel $q > 0$ et pour tout entier n , $q^{-n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n$, on complète le graphique à l'aide de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{q}$.

On définit ainsi, une fonction f telle que pour tout entier relatif n , $f(n) = q^n$.

Pour tous entiers relatifs m et p ,

$$f(m) \times f(p) = q^m \times q^p = q^{m+p} = f(m+p)$$



ÉTAPE 2 : prolongement par dichotomie.

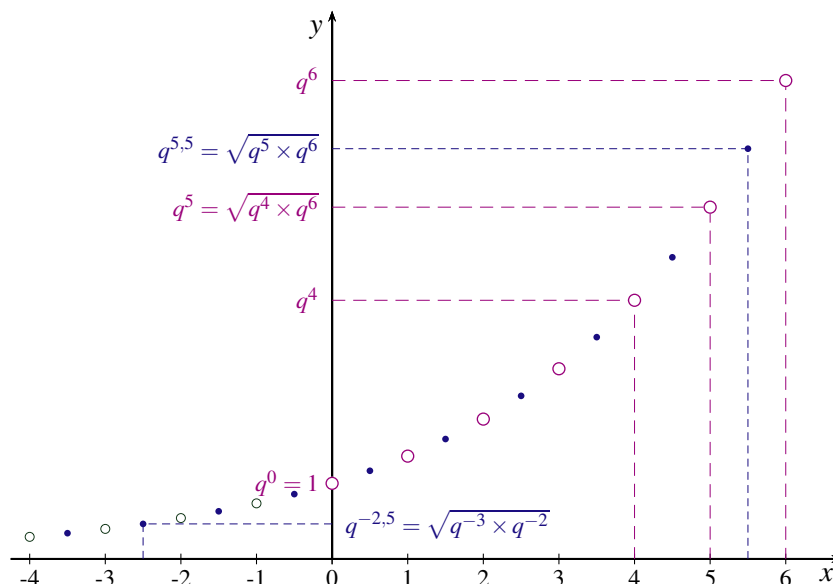
RAPPEL

Trois réels a , b et c sont, dans cet ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique si, et seulement si, b est la moyenne géométrique de a et c (c'est à dire : $b = \sqrt{ac}$)

— Points d'abscisses $n + 0,5$ avec $n \in \mathbb{Z}$

Au point d'abscisse $n + 0,5 = \frac{n + (n+1)}{2}$ on associe la moyenne géométrique des deux termes consécutifs :

$$f(n + 0,5) = \sqrt{f(n) \times f(n+1)} = \sqrt{q^n \times q^{n+1}}$$



Pour tout entier relatif n :

$$f(n+0,5) = \sqrt{q^n \times q^{n+1}} = q^{\frac{2n+1}{2}} = q^n \times q^{0,5} = f(n) \times f(0,5)$$

— On obtient de nouveaux points en réitérant ce processus :

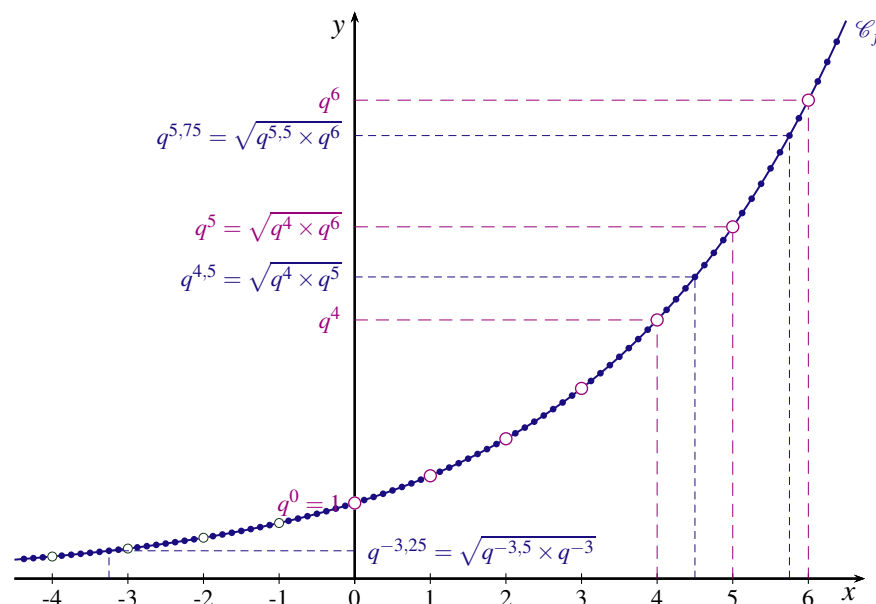
Au point d'abscisse $n+0,25 = \frac{n+(n+0,5)}{2} = \frac{2n+0,5}{2}$, on associe le réel :

$$f(n+0,25) = \sqrt{q^n \times q^{n+0,5}} = q^{\frac{2n+0,5}{2}} = q^n \times q^{0,25} = f(n) \times f(0,25)$$

Au point d'abscisse $n+0,75 = \frac{(n+0,5)+(n+1)}{2} = \frac{2n+1,5}{2}$ on associe le réel :

$$f(n+0,75) = \sqrt{q^{n+0,5} \times q^{n+1}} = q^{\frac{2n+1,5}{2}} = q^{n+0,75} = f(n) \times f(0,75)$$

Plus généralement soient $A(a; q^a)$ et $B(b; q^b)$ deux points de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f , ce processus permet d'obtenir le point $M\left(\frac{a+b}{2}; \sqrt{q^a \times q^b}\right)$ appartenant à la courbe $\mathcal{C}_f$.



$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \sqrt{q^a \times q^b} = q^{\frac{a+b}{2}} = q^{\frac{a}{2}} \times q^{\frac{b}{2}} = f\left(\frac{a}{2}\right) \times f\left(\frac{b}{2}\right)$$

La fonction f vérifie la relation $f(x+y) = f(x) \times f(y)$.

DES FONCTIONS « TRANSFORMANT LES SOMMES EN PRODUITS »

Soit f une fonction continue vérifiant pour tous réels x et y :

$$\begin{cases} f(x) \neq 0 \\ f(x+y) = f(x) \times f(y) \end{cases}$$

1. En écrivant que pour tout réel x , $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right)$, montrer que pour tout réel x , $f(x) > 0$.
2. En remarquant que pour tout réel x , $f(x+0) = f(x)$, en déduire la valeur de $f(0)$.
3. Démontrer que pour tout réel x , $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.
4. On pose $f(1) = q$.
 - a) Calculer $f(2)$, $f(3)$ et $f(0,5)$.
 - b) Calculer $f(-1)$ et $f(-2)$.
5. Démontrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = f(n)$ est une suite géométrique.

I FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE q

1 FONCTIONS EXPONENTIELLES $x \mapsto q^x$, AVEC $q > 0$

Soit q un nombre strictement positif. La suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = q^n$ est une suite géométrique de raison q .

La fonction exponentielle de base q est le prolongement de cette suite géométrique.

DÉFINITION

Soit q un réel strictement positif

La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = q^x$ s'appelle la fonction exponentielle de base q .

On admet que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$.

EXEMPLE

La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 0,8^x$ est la fonction exponentielle de base 0,8.

Une valeur approchée de l'image de $-5,3$ est obtenue à la calculatrice en tapant la séquence : $0.8 \wedge (-5.3)$.

RELATION FONCTIONNELLE

La fonction exponentielle f de base $q > 0$ transforme les sommes en produits. Pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

Autrement dit, pour tous réels x et y : $q^{x+y} = q^x \times q^y$.

CONSÉQUENCES

— $\text{Pour tous réels } x \text{ et } y, q^{-x} = \frac{1}{q^x} \text{ et } q^{x-y} = \frac{q^x}{q^y}.$

En effet, $q^{x-x} = q^x \times q^{-x}$ soit $1 = q^x \times q^{-x}$ donc $q^x \neq 0$ et $q^{-x} = \frac{1}{q^x}$.

De plus, $q^{x-y} = q^{x+(-y)} = q^x \times q^{-y} = \frac{q^x}{q^y}$

— $\text{Pour tout réel } x, q^x > 0.$

En effet, $q^{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}} = q^{\frac{x}{2}} \times q^{\frac{x}{2}}$ soit $q^x = (q^{\frac{x}{2}})^2$ avec $q^x \neq 0$.

— $\text{Pour tout réel } x, q^{\frac{x}{2}} = \sqrt{q^x}, \text{ et en particulier } q^{0,5} = \sqrt{q}$

En effet, $q^x = (q^{\frac{x}{2}})^2$ et $q^x > 0$.

— $\text{Pour tout réel } x \text{ et tout entier relatif } m, (q^x)^m = q^{mx}$

Propriété usuelle des exposants entiers relatifs.

— $\text{Pour tout entier naturel } n > 0, q^{\frac{1}{n}} \text{ est « la racine } n\text{-ième » de } q$

Pour tout entier naturel $n > 0$, comme $\frac{1}{n} \times n = 1$, alors $q^{\frac{1}{n}}$ est le nombre tel que $\left(q^{\frac{1}{n}}\right)^n = q$

2 SENS DE VARIATION

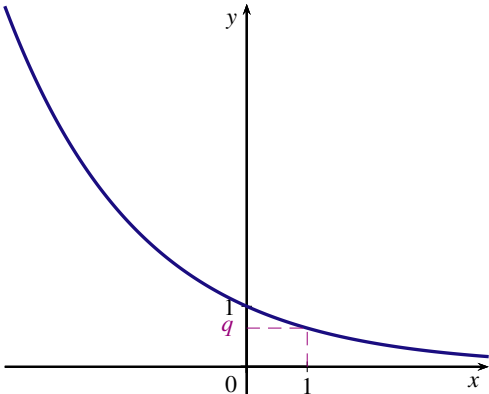
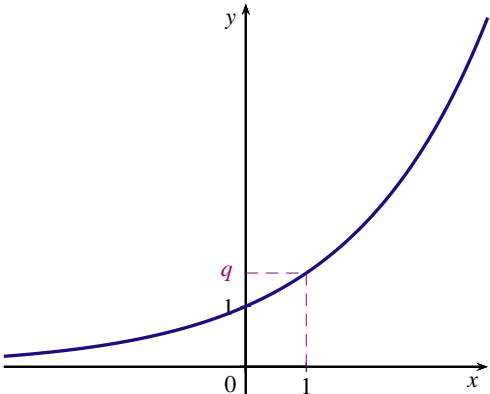
En continuité avec les suites numériques, on admet que le sens de variation de la fonction exponentielle de base q avec $q > 0$ est le même que celui de la suite géométrique associée :

- Si $0 < q < 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $q = 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est constante sur $\mathbb{R}$.
- Si $q > 1$, la fonction $x \mapsto q^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

CONSÉQUENCE

Si $q > 0$ et $q \neq 1$, alors pour tous nombres réels a et b : $q^a = q^b$ si, et seulement si, $a = b$.

3 PROPRIÉTÉS

$0 < q < 1$	$q > 1$
La fonction exponentielle de base q est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.	La fonction exponentielle de base q est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
$\lim_{x \rightarrow -\infty} q^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} q^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} q^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} q^x = +\infty$
	
La fonction fonction exponentielle de base q est convexe sur $\mathbb{R}$	

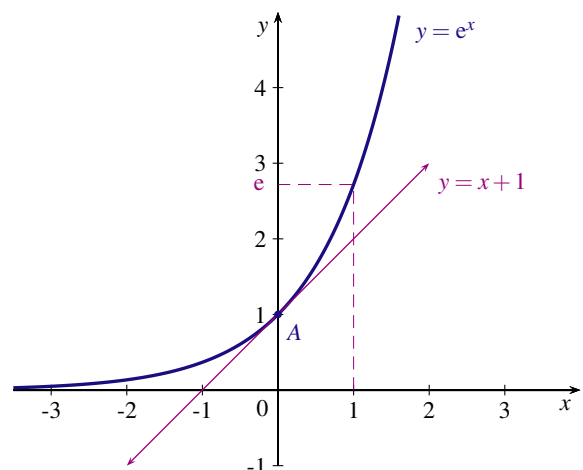
II LA FONCTION EXPONENTIELLE

On admet que parmi toutes les fonctions exponentielles de base q il existe une seule fonction dont le nombre dérivé en 0 soit égal à 1.

Autrement dit, il existe une seule valeur du réel q telle que la tangente au point $A(0; 1)$ de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto q^x$ a pour coefficient directeur 1.

Cette valeur particulière du réel q est notée e .

Le nombre e est un irrationnel une valeur approchée est : $e \approx 2,71828$.



1 DÉFINITION

La fonction $x \mapsto e^x$ s'appelle la fonction exponentielle de base e ou plus simplement exponentielle.
On la note $\exp$

$$\exp: x \mapsto e^x$$

CONSÉQUENCES

- La fonction exponentielle est définie pour tout réel x par $\exp(x) = e^x$
- $\exp(0) = e^0 = 1$, $\exp(1) = e^1 = e$, $\exp(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$, $\exp(0,5) = e^{0,5} = \sqrt{e}$
- La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$: pour tout nombre réel x , $e^x > 0$
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et son nombre dérivé en 0 est 1 : $\exp'(0) = 1$
- Pour tous réels x et y , et pour tout entier relatif m

$$e^{x+y} = e^x \times e^y, \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x}, \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}, \quad (e^x)^m = e^{mx}$$

2 DÉRIVÉE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

La dérivée de la fonction exponentielle est la fonction exponentielle. Pour tout nombre réel x ,

$$\exp'(x) = e^x$$

* DÉMONSTRATION

Pour tout réel x et pour tout réel $h \neq 0$,

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x \times e^h - e^x}{h} = e^x \times \frac{e^h - 1}{h}$$

Or $\exp'(0) = 1$ signifie que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{0+h} - e^0}{h} = 1$ soit $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Donc pour tout réel x , $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \times \frac{e^h - 1}{h} = e^x$

3 VARIATION

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

* DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.

Or pour tout réel x , $e^x > 0$. On en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

CONSÉQUENCES

- Pour tout réel $x \leq 0$, $0 < e^x \leq 1$
- Pour tout réel $x \geq 0$, $e^x \geq 1$
- Pour tous réels x et y , $e^x = e^y \iff x = y$ et $e^x < e^y \iff x < y$

EXEMPLES

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{1-3x} < e^{2x-3}$

$$e^{1-3x} < e^{2x-3} \iff 1-3x < 2x-3 \iff -5x < -4 \iff x > \frac{4}{5}$$

D'où l'ensemble solution $S = \left] \frac{4}{5}; +\infty \right[$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{x^2-1} \geq 1$

$$e^{x^2-1} \geq 1 \iff e^{x^2-1} \geq e^0 \iff x^2 - 1 \geq 0$$

D'où l'ensemble solution $S =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$

4 COURBE REPRÉSENTATIVE

CONVEXITÉ

La fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$

* DÉMONSTRATION

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa dérivée.

Par conséquent, la dérivée seconde est $\exp''(x) = e^x$ donc $\exp''(x) > 0$.

LIMITES

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$e > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$. Par prolongement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

$$e^{-n} = \frac{1}{e^n} = \left(\frac{1}{e}\right)^n \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow -\infty} e^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = 0. \text{ Par prolongement, } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

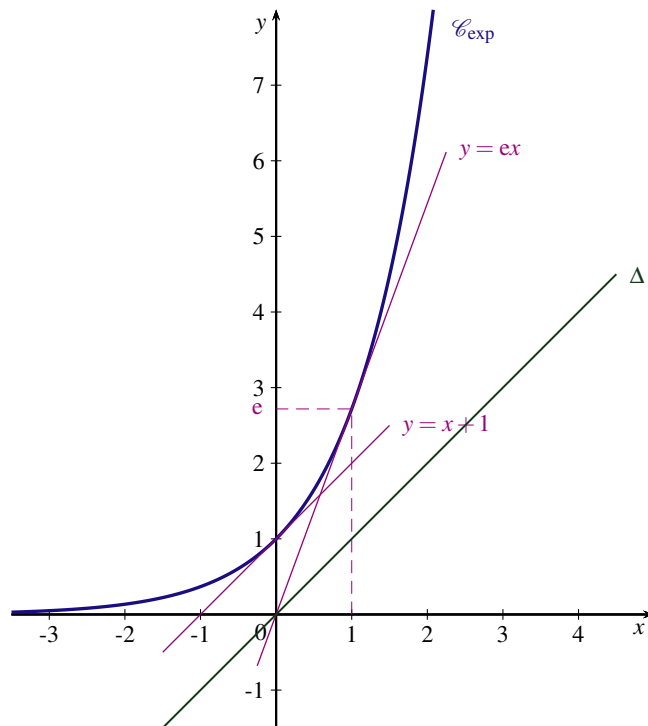
PROPRIÉTÉS

1. Équation de la tangente au point d'abscisse 0 : $y = x + 1$

2. Équation de la tangente au point d'abscisse 1 : $y = \exp'(1) \times (x - 1) + \exp(1)$ Soit $y = ex$

3. La courbe représentative de la fonction exponentielle est située au dessus de la droite Δ d'équation $y = x$.

(cf. exercice n° 7)



III EXPONENTIELLE D'UNE FONCTION : $\exp(u)$

On considère une fonction u définie sur un intervalle I .

La composée de la fonction u suivie de la fonction exponentielle est la fonction f notée $f = e^u$.

EXEMPLES

- La fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{0,5x-3}$ est la composée de la fonction affine u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 0,5x - 3$ suivie de la fonction exponentielle, $f = e^u$.
- La fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = 0,5e^x - 3$ est la composée la fonction exponentielle suivie de la fonction affine u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 0,5x - 3$

1 DÉRIVÉE

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I . La fonction e^u est dérivable sur I et

$$(e^u)' = e^u \times u'$$

EXEMPLES

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^{-x}$.
Pour tout réel x , on pose $u(x) = -x$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = -1$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -e^{-x}$.
2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^{0,5x^2-2x+1}$.
Pour tout réel x , posons $u(x) = 0,5x^2 - 2x + 1$. u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = x - 2$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (x - 2)e^{0,5x^2-2x+1}$.

2 VARIATION

Les fonctions u et e^u ont les mêmes variations sur tout intervalle I où u est définie.

✱ DÉMONSTRATION

Soient $a < b$ deux réels de l'intervalle I

— Si u est décroissante sur I alors $u(b) < u(a)$

Or la fonction exponentielle est strictement croissante donc si $u(b) < u(a)$ alors $e^{u(b)} < e^{u(a)}$

Par conséquent, si u est décroissante sur I alors la fonction e^u est décroissante sur I .

— Si u est croissante sur I alors $u(a) < u(b)$

De la stricte croissance de la fonction exponentielle on en déduit que si $u(a) < u(b)$ alors $e^{u(a)} < e^{u(b)}$

Donc si u est croissante sur I alors la fonction e^u est croissante sur I .

REMARQUE

Si u est dérivable sur I , alors la fonction $f = e^u$ est dérivable sur I et pour tout réel $x \in I$, $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

Or pour tout réel $x \in I$, $e^{u(x)} > 0$ donc $f'(x)$ est du même signe que $u'(x)$.

EXERCICE 1

1. Calculer

$$A = 8^{\frac{1}{3}}; \quad B = 4^{\frac{3}{4}}; \quad C = 27^{\frac{4}{3}}; \quad D = \frac{0,25^{0,7} \times 0,25^{1,2}}{0,25^{1,4}}; \quad E = \frac{\left(0,2^{\frac{2}{3}}\right)^6 \times 0,2^{-1,6}}{0,2^{3,4}}.$$

2. Simplifier les expressions suivantes :

$$F(x) = (1 + 4^x)^2 - (1 - 4^x)^2; \quad G(x) = \frac{2^{2x-3} \times 0,5^{x+2}}{2^{-3x-1}}; \quad H(x) = \frac{(5^{x+1} - 0,2^{-x})^2}{2^4}; \quad I(x) = \frac{4^{x+0,5} + (2^x)^2}{6^{1-x}}.$$

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4^x - 0,25^x$.

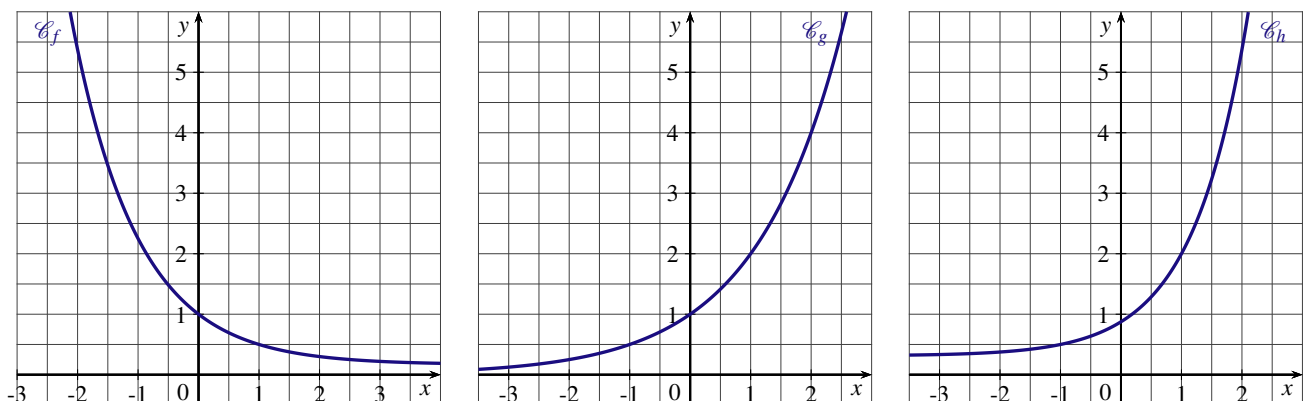
1. Calculer $f(-0,5)$, $f(0,5)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(-2)$ et $f(2)$.

Quelle conjecture peut-on faire ?

2. Montrer que pour tout réel x , $f(-x) = -f(x)$

EXERCICE 3

On a tracé ci-dessous, les courbes représentatives de trois fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$.



1. Une seule de ces trois fonctions est une fonction exponentielle de base q . Laquelle est-ce ?

2. Quelle est la valeur du réel q ?

EXERCICE 4

1. En raison de l'évaporation, un bassin contenant 95 m³ d'eau perd chaque semaine 3 % de son volume d'eau. Modéliser l'évolution du volume d'eau contenue dans le bassin à l'aide d'une fonction f de la forme

$$f(x) = k \times q^x$$

Préciser les valeurs de k et de q , et donner le sens de variation de la fonction f .

2. En trois mois, le cours d'une action a augmenté de 12%.

Calculer le taux d'évolution mensuel moyen du cours de cette action pendant les trois mois. (Donner le résultat arrondi à 0,01 % près)

3. Le 4 janvier 2010, le cours du lingotin d'or de 500 g était de 12 400 €, contre 20 150 € le 4 août 2016.

Calculer le pourcentage annuel moyen d'évolution du cours du lingotin d'or entre ces deux dates.

EXERCICE 5

Simplifier les écritures suivantes :

$$A = (e^x)^2 - \frac{1}{e^{-2x}}; \quad B = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2; \quad C = e^{-x} \left(e^{2x} - \frac{1}{e^x} \right); \quad D = \frac{e^{2x+1}}{e^{1-x}}; \quad E = \frac{(e^{x+2})^2}{e^{2x-1}}.$$

EXERCICE 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $e^{x^2+x-1} = 1$
2. $\frac{e^{3x+5}}{e^{3-2x}} = e^{2x^2-1}$
3. $2e^{2x} - e^x - 1 = 0$
4. $e^{\frac{1}{x}} \geq e$
5. $e^{2x} \leq e^x$
6. $e^{2x}e^{x^2} < 1$

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de f , en déduire que f admet un minimum.
3. Justifier que pour tout réel x on a : $e^x > x$.

EXERCICE 8

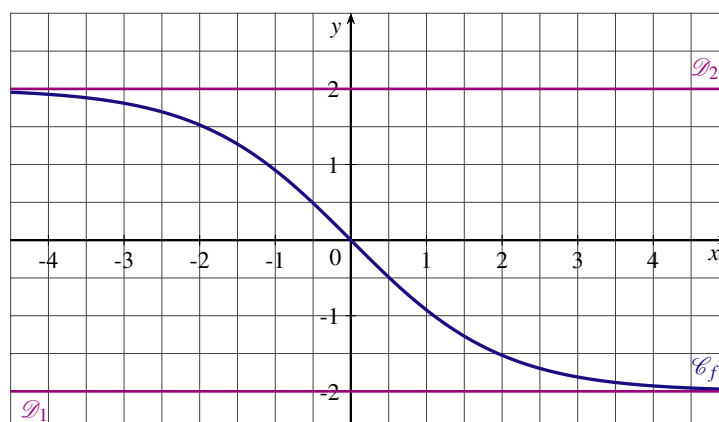
Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction f

1. f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x + 1}{x}$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1)e^x$
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \frac{1}{e^x}$

EXERCICE 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{4}{1+e^x} - 2$.

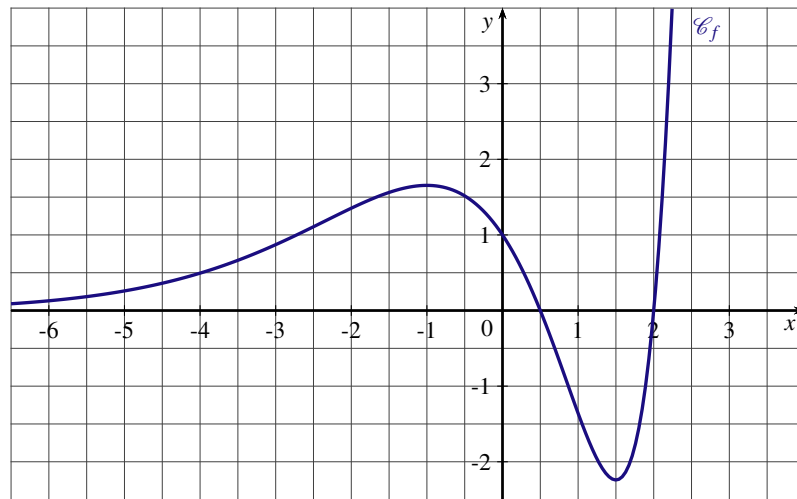
On a tracé ci-dessous, la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant la fonction f et les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations respectives $y = -2$ et $y = 2$



1. Étudier les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.
2. Étudier les variations de la fonction f .
3. Étudier la convexité de la fonction f .
4. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet-elle un point d'inflexion ?

EXERCICE 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - \frac{5}{2}x + 1\right)e^x$. Sa courbe représentative notée $\mathcal{C}_f$ est donnée ci-dessous.



1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .
 - a) Calculer $f'(x)$.
 - b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x .
 - c) Dresser le tableau de variations de f .
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
Tracer la droite T sur le graphique précédent.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 40$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[2;3]$.
À l'aide de la calculatrice, déterminer la valeur arrondie à 10^{-2} près de α .

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = e^x + \frac{1}{e^x}$.

1. On note f' la dérivée de la fonction f .
 - a) Calculer $f'(x)$.
 - b) Donner le tableau de variations de f .
 - c) En déduire que pour tout réel x , $e^x + e^{-x} \geq 2$.
2. On note f'' la dérivée seconde de la fonction f .
 - a) Montrer que pour tout réel x , $f''(x) = f(x)$.
 - b) Étudier la convexité de la fonction f .

EXERCICE 12

Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{3-2x}{e^x}$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et f'' la dérivée seconde de la fonction f .

1. a) Montrer que pour tout nombre réel x , on a : $f'(x) = (2x-5) \times e^{-x}$.
b) Étudier les variations de la fonction f .
2. Montrer que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1;0]$.
Donner la valeur arrondie à 10^{-2} près de α .

3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse 0.
4. a) Étudier la convexité de la fonction f .
b) La courbe représentative de la fonction f a-t-elle un point d'inflexion ? Si oui, donner ses coordonnées.

EXERCICE 13

Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2} - (e^x)^2$
2. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{x^2}}{e^{1-x}}$
3. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2} \times e^{x^2-2x+1}$
4. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(\frac{x}{2} - 1\right)e^{-0,5x}$

EXERCICE 14

(D'après sujet bac Nouvelle Calédonie 2010)

1. Dans cette question aucune justification n'est demandée, tous les tracés demandés seront effectués sur le repère orthonormal fourni en annexe qui sera rendu avec la copie.

On souhaite tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f satisfaisant les conditions suivantes :

- La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $[0;6]$.
- Le maximum de la fonction f est 5, il est atteint pour $x = 0$.
- Le minimum de la fonction f est 1.
- La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;6]$.

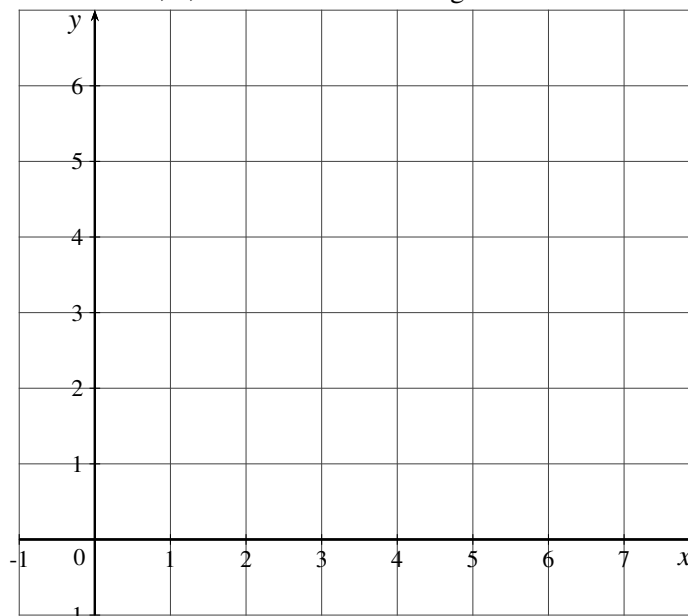
On note f' la fonction dérivée de f et on sait que $f'(0) = -3$, $f(6) = 3$ et $f'(6) = 2$.

- Le signe de la fonction dérivée f' de f est donné par le tableau suivant :

x	0	4	6
signe de $f'(x)$	—	0	+

- a) Donner le tableau de variations de la fonction f . On fera figurer dans le tableau les images par f de 0, de 4 et de 6.
- b) Donner l'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 6.
- c) Tracer dans le repère fourni en annexe la courbe représentative d'une fonction satisfaisant toutes les conditions ci-dessus.

On placera les points d'abscisses 0, 4, 6 et on tracera les tangentes à la courbe en ces points.



2. Dans cette question toute réponse doit être justifiée.

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[0;6]$ par $g(x) = e^{f(x)}$.

a) Déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle $[0;6]$.

Donner le tableau de variation de la fonction g . On précisera les valeurs de $g(0)$, $g(4)$ et $g(6)$.

b) Déterminer $g'(0)$.

EXERCICE 15

PARTIE A

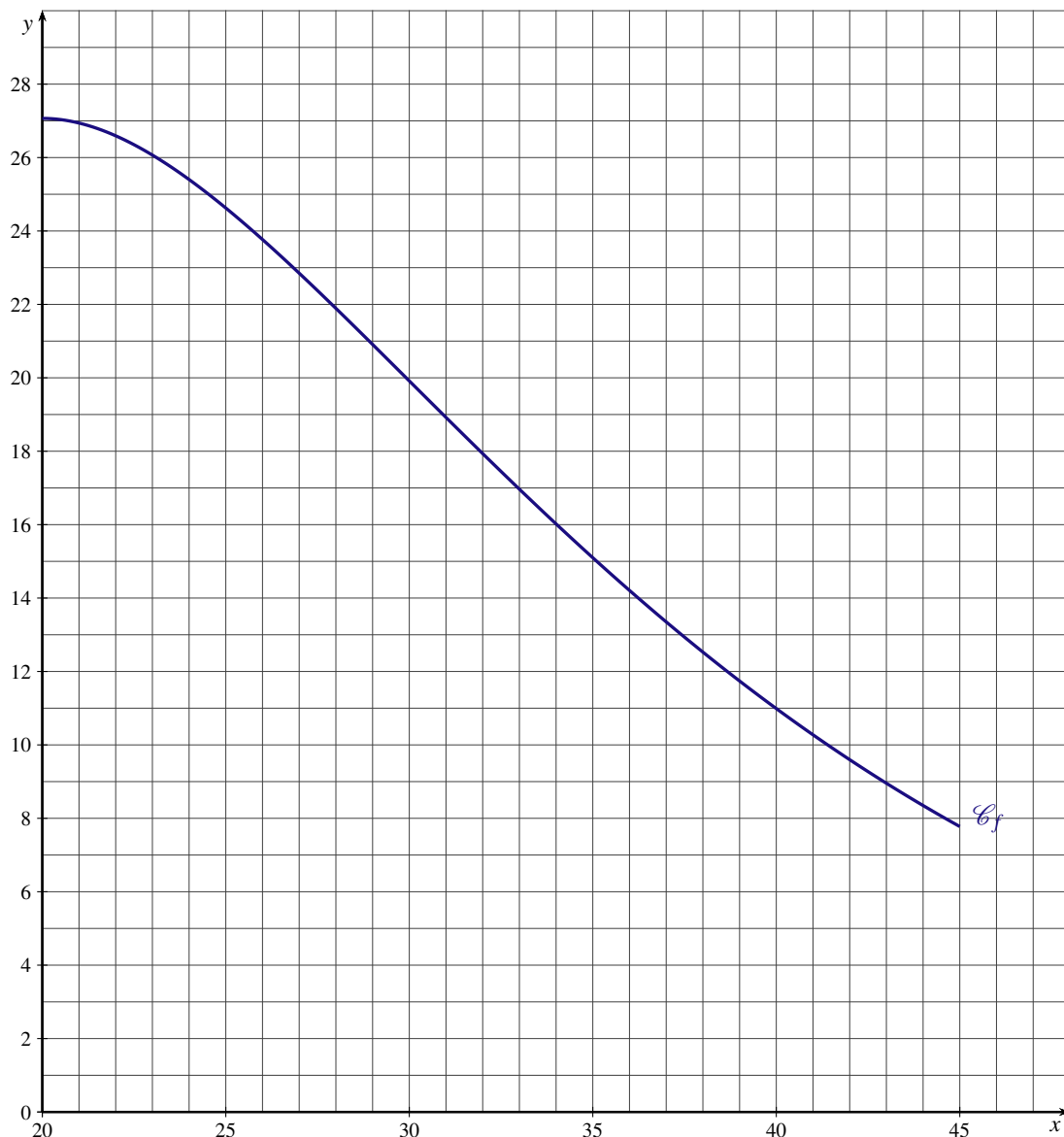
Une entreprise fabrique un nouvel article. Le coût moyen de fabrication de chaque article est de 15 euros. L'entreprise envisage de vendre chaque article entre 20 euros et 45 euros.

Avant la commercialisation l'entreprise effectue une étude de marché afin de déterminer la quantité demandée en fonction du prix de vente.

L'étude a permis d'établir que, si chaque article est vendu au prix de x euros, la quantité d'articles demandés $f(x)$, en milliers d'unités, s'exprime par :

$$f(x) = (20x - 200)e^{-0,1x}.$$

La fonction de demande f est définie sur l'intervalle $[20;45]$. La représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. Si l'entreprise propose un prix de vente de 40 euros :
 - a) calculer le nombre d'articles demandés arrondi à la centaine d'articles près.
 - b) Estimer alors le bénéfice réalisé.
2. a) On note f' la dérivée de la fonction f .
Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[20; 45]$, $f'(x) = (40 - 2x)e^{-0,1x}$.
b) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[20; 45]$.
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 11$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[20; 45]$.
b) En déduire l'intervalle dans lequel doit se situer le prix de vente d'un article pour que la quantité demandée soit supérieure ou égale à 11 000 unités.
4. Un logiciel de calcul formel donne le résultat suivant :

1	Dériver $[(40 - 2x) \cdot \exp(-0.1x)]$
	$\left(\frac{x}{5} - 6\right) \cdot \exp(-0.1x)$

Utiliser ce résultat pour déterminer, en justifiant, l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

PARTIE B

On appelle fonction d'offre la fonction g , définie sur l'intervalle $[20; 45]$, par : $g(x) = x - 18$.

Le nombre $g(x)$ est le nombre de milliers d'articles que l'entreprise est prête à produire pour un prix de vente unitaire de x euros.

1. Tracer sur le graphique précédent la représentation graphique de la fonction g .
2. On appelle prix d'équilibre le prix unitaire x d'un article pour lequel l'offre est égale à la demande.
 - a) Déterminer graphiquement le prix d'équilibre.
 - b) En déduire une valeur approchée au millier près, du nombre d'articles que l'entreprise peut espérer vendre au prix d'équilibre.
 - c) Estimer alors le bénéfice réalisé.

EXERCICE 16

Soit f la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = x - e^{-0,5x^2}$

1. On note f' la dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de la fonction f .
3. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α .
b) On considère l'algorithme suivant :

Initialisation
a prend la valeur 0
b prend la valeur 1
Traitement
Tant que $b - a > 10^{-3}$ faire
m prend la valeur $\frac{a+b}{2}$
Si $f(a) \times f(m) < 0$ alors b prend la valeur m
Sinon a prend la valeur m
Fin de Tant que
Sortie
Afficher a
Afficher b

Les valeurs de sortie de cet algorithme sont $a \approx 0,7529$ et $b \approx 0,7539$. Que signifie ce résultat ?

4. Étudier la convexité de la fonction f .
5. Déterminer les coordonnées des points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction f .

EXERCICE 17

(D'après sujet bac Pondichéry 2016)

La partie A peut être traitée indépendamment des parties B et C.

L'entreprise *BBE* (*Bio Bois Énergie*) fabrique et vend des granulés de bois pour alimenter des chaudières et des poêles chez des particuliers ou dans des collectivités.

L'entreprise produit entre 1 et 15 tonnes de granulés par jour.

— Les coûts de fabrication quotidiens sont modélisés par la fonction C définie sur l'intervalle $[1; 15]$ par :

$$C(x) = 0,3x^2 - x + e^{-x+5}$$

où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $C(x)$ le coût de fabrication quotidien correspondant en centaines d'euros.

— Dans l'entreprise *BBE* le prix de vente d'une tonne de granulés de bois est de 300 euros.

La recette quotidienne de l'entreprise est donc donnée par la fonction R définie sur l'intervalle $[1; 15]$ par :

$$R(x) = 3x$$

où x désigne la quantité de granulés en tonnes et $R(x)$ la recette quotidienne correspondante en centaines d'euros.

— On définit par $D(x)$ le résultat net quotidien de l'entreprise en centaines d'euros, c'est-à-dire la différence entre la recette $R(x)$ et le coût $C(x)$, où x désigne la quantité de granulés en tonnes.

PARTIE A : Étude graphique

Sur le graphique situé en annexe, on donne $\mathcal{C}$ et Δ les représentations graphiques respectives des fonctions C et R dans un repère d'origine O .

Dans cette partie A, répondre aux questions suivantes à l'aide du graphique, et avec la précision permise par celui-ci. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer la quantité de granulés en tonnes pour laquelle le coût quotidien de l'entreprise est minimal.
2. a) Déterminer les valeurs $C(6)$ et $R(6)$ puis en déduire une estimation du résultat net quotidien en euros dégagé par l'entreprise pour 6 tonnes de granulés fabriqués et vendus.
b) Déterminer les quantités possibles de granulés en tonnes que l'entreprise doit produire et vendre quotidiennement pour dégager un résultat net positif, c'est-à-dire un bénéfice.

PARTIE B : Étude d'une fonction

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $[1; 15]$ par :

$$g(x) = -0,6x + 4 + e^{-x+5}$$

On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $[1; 15]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. a) Calculer $g'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[1; 15]$.
b) En déduire que la fonction g est décroissante sur l'intervalle $[1; 15]$.
2. a) Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[1; 15]$, en précisant les valeurs $g(1)$ et $g(15)$ arrondies à l'unité.

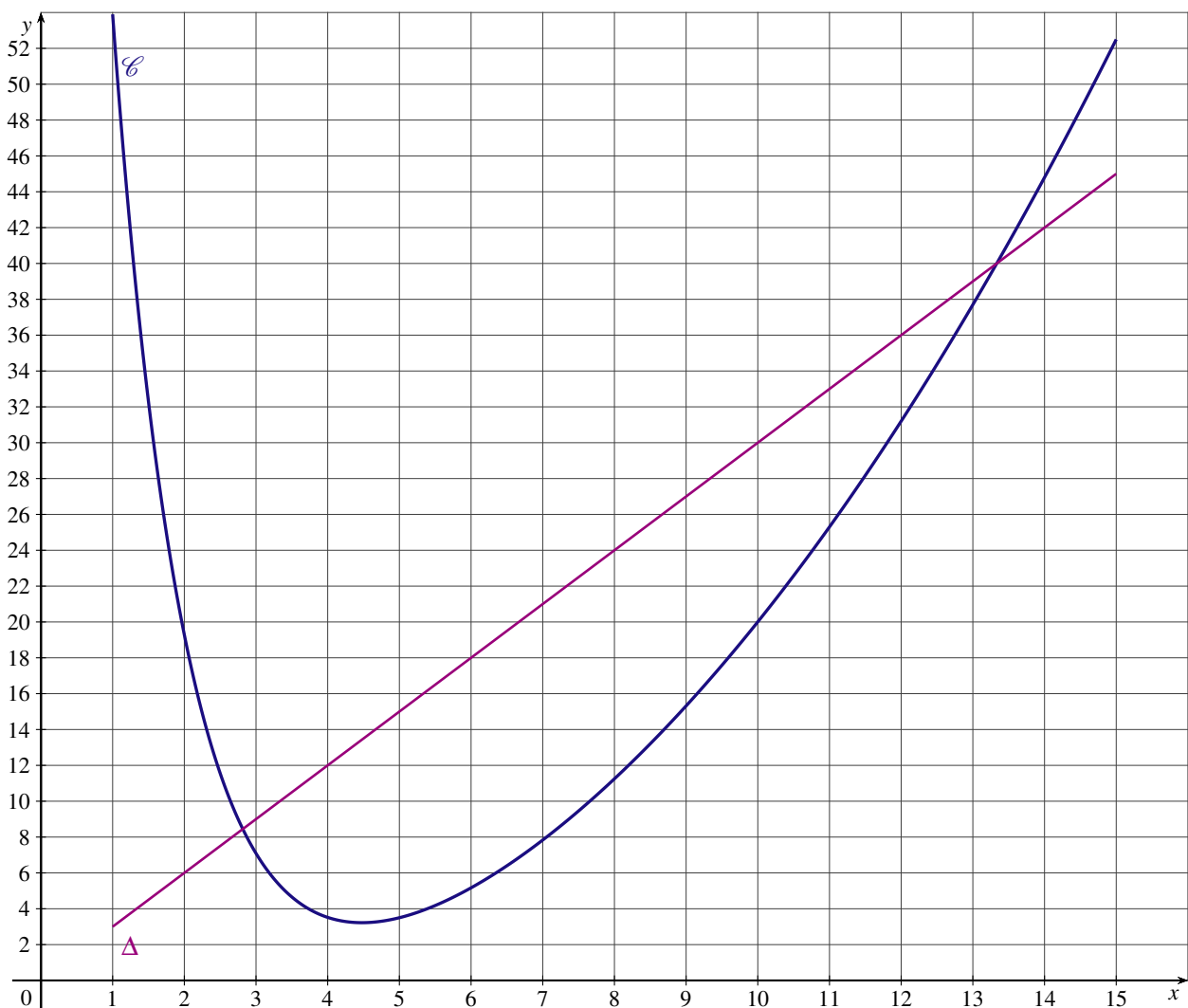
- b) Le tableau de variation permet d'affirmer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1; 15]$.
Donner une valeur approchée de α à 0,1 près.
- c) Dédurre des questions précédentes le tableau de signe de $g(x)$ sur l'intervalle $[1; 15]$.

PARTIE C : Application économique

1. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1; 15]$, on a :

$$D(x) = -0,3x^2 + 4x - e^{-x+5}$$

2. On admet que la fonction D est dérivable sur l'intervalle $[1; 15]$ et on note D' sa fonction dérivée.
Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1; 15]$, on a $D'(x) = g(x)$, où g est la fonction étudiée dans la partie B.
3. En déduire les variations de la fonction D sur l'intervalle $[1; 15]$.
4. a) Pour quelle quantité de granulés l'entreprise va-t-elle rendre son bénéfice maximal ?
On donnera une valeur approchée du résultat à 0,1 tonne près.
- b) Calculer alors le bénéfice maximal à l'euro près.



Chapitre 4

PROBABILITÉS DISCRÈTES

I	PROBABILITÉS CONDITIONNELLES	56
1	Définition	56
2	Formule des probabilités composées	56
II	FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES	57
1	Cas de deux évènements	57
2	Partition	57
3	Formule des probabilités totales	57
III	REPRÉSENTATION SOUS FORME D'UN ARBRE PONDÉRÉ	58
IV	ÉVÈNEMENTS INDÉPENDANTS	59
1	Indépendance de deux évènements	59
2	Propriété	59
3	Loi binomiale	59
	EXERCICES	61

I PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

La notion de probabilité conditionnelle intervient quand pendant le déroulement d'une expérience aléatoire, une information est fournie modifiant ainsi la probabilité d'un évènement.

1 DÉFINITION

Soient A et B deux évènements d'un même univers tel que $p(A) \neq 0$.

La probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que l'évènement A est réalisé se note $p_A(B)$ et on a :

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

Remarque :

Si $p(B) \neq 0$ on définit de même $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

EXEMPLE

Une usine produit des articles en grande quantité, dont certains sont défectueux à cause de deux défauts possibles, un défaut de fabrication ou un défaut d'emballage.

Une étude statistique a permis de constater que 12% des articles sont défectueux, 6% des articles ont un défaut de fabrication et 8% des articles ont un défaut d'emballage.

Un article choisi au hasard présente un défaut d'emballage. Quelle est la probabilité qu'il ait aussi un défaut de fabrication ?
Notons F l'évènement « un article prélevé au hasard présente un défaut de fabrication » et E l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente un défaut d'emballage ».

— 12% des articles ont un défaut de fabrication ou un défaut d'emballage d'où $p(F \cup E) = 0,12$.

— 6% des articles ont un défaut de fabrication et 8% des articles ont un défaut d'emballage d'où $p(F) = 0,06$ et $p(E) = 0,08$.

La probabilité qu'un article ait les deux défauts est :

$$p(F \cup E) = p(F) + p(E) - p(F \cap E) \quad \text{d'où} \quad p(F \cap E) = 0,08 + 0,06 - 0,12 = 0,02$$

La probabilité qu'un article ayant un défaut d'emballage ait aussi un défaut de fabrication est

$$p_E(F) = \frac{p(F \cap E)}{p(E)} = \frac{0,02}{0,08} = 0,25$$

La probabilité qu'un article ayant un défaut d'emballage ait aussi un défaut de fabrication est égale à 0,25.

2 FORMULE DES PROBABILITÉS COMPOSÉES

La relation définissant la probabilité conditionnelle peut s'écrire de la manière suivante

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$$

Cette écriture s'appelle la *formule des probabilités composées*

Soient A et B deux évènements d'un même univers tels que $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$. Alors :

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p_B(A) \times p(B)$$

EXEMPLE

85 % d'une population est vaccinée contre une maladie. On a constaté que 2% des individus vaccinés n'ont pas été immunisés contre cette maladie.

Quelle est la probabilité qu'un individu soit vacciné et malade ?

Soit V l'évènement : « Un individu est vacciné » et M l'évènement : « Un individu est malade » ;
Nous avons $p(V) = 0,85$ et $p_V(M) = 0,02$.
La probabilité que parmi cette population, une personne soit vaccinée et malade est :

$$p(V \cap M) = 0,02 \times 0,85 = 0,017$$

II FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

1 CAS DE DEUX ÉVÈNEMENTS

Si A est un évènement de Ω tel que $p(A) \neq 0$ et $p(A) \neq 1$, alors pour tout évènement B de Ω

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = p_A(B) \times p(A) + p_{\bar{A}}(B) \times p(\bar{A})$$

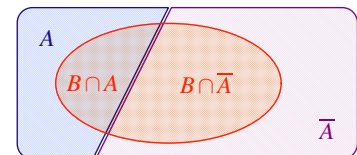
Preuve :

Les évènements $A \cap B$ et $\bar{A} \cap B$ sont incompatibles et $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$ d'où

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$$

D'après la formule des probabilités composées

$$p(B) = p_A(B) \times p(A) + p_{\bar{A}}(B) \times p(\bar{A})$$



2 PARTITION

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 et $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ un ensemble d'évènements de probabilités non nulles d'un même univers Ω .

$A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de l'univers Ω si, et seulement si, tout évènement élémentaire de Ω appartient à l'un des évènements A_i et à un seul. C'est à dire si, et seulement si,

1. Pour tous entiers i et j tels que $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ et $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.
2. $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$.

Remarques :

- Un évènement A de probabilité non nulle et son évènement contraire $\bar{A}$ forment une partition de Ω .
- Si les évènements $A_1, A_2, \dots, A_n$ forment une partition de Ω alors

$$\sum_{i=1}^n p(A_i) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_n) = 1$$

3 FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

Soit n un entier supérieur ou égal à 2 si $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ est une partition de Ω alors pour tout évènement B de Ω ,

$$p(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B)$$

EXEMPLE

Le parc informatique d'une entreprise est constitué d'ordinateurs de marques A, B ou C référencés au service de maintenance. 60% des ordinateurs sont de la marque A et parmi ceux-ci, 15 % sont des portables. 30 % des ordinateurs sont de la marque B et 20 % d'entre eux sont des portables. Les autres ordinateurs sont de la marque C et 50 % d'entre eux sont des portables.

On consulte au hasard la fiche d'un ordinateur, quelle est la probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable ?

Notons S l'évènement : « la fiche est celle d'un ordinateur portable »

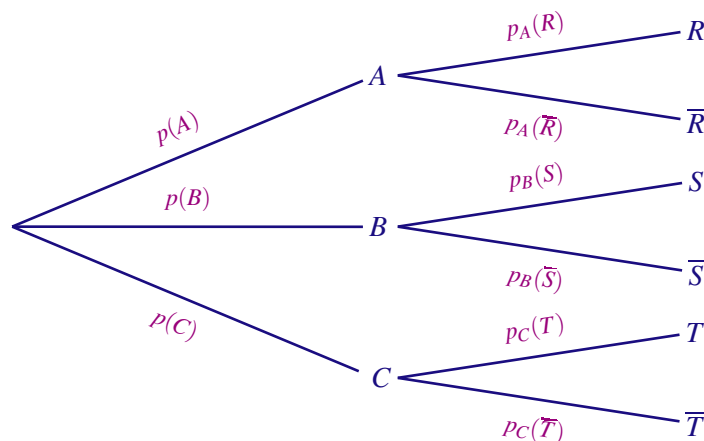
Les évènements A , B et C forment une partition de l'univers alors d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p(S) &= p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S) \\ &= p_A(S) \times p(A) + p_B(S) \times p(B) + p_C(S) \times p(C) \\ &= 0,15 \times 0,6 + 0,2 \times 0,3 + 0,5 \times 0,1 = 0,2 \end{aligned}$$

La probabilité que ce soit la fiche d'un ordinateur portable est 0,2.

III REPRÉSENTATION SOUS FORME D'UN ARBRE PONDÉRÉ

Une expérience aléatoire peut être schématisée par un arbre pondéré dont chaque branche est affecté d'un poids qui est une probabilité.



- La racine de l'arbre est l'univers Ω
- Les évènements qui se trouvent aux extrémités des branches issues d'un même nœud forment une partition de l'évènement situé à ce nœud.
Par exemple, $\{A, B, C\}$ est une partition de l'univers Ω et $\{S, \bar{S}\}$ est une partition de l'évènement B .
- Un chemin complet qui conduit à un sommet final, représente l'intersection des évènements qui le composent.
Par exemple, le chemin dont l'extrémité est R représente l'évènement $A \cap R$.
- Le poids d'une branche primaire est la probabilité de l'évènement qui se trouve à son extrémité.
Le poids d'une branche secondaire est la probabilité conditionnelle de l'évènement qui se trouve à son extrémité sachant que l'évènement qui se trouve à son origine est réalisé.

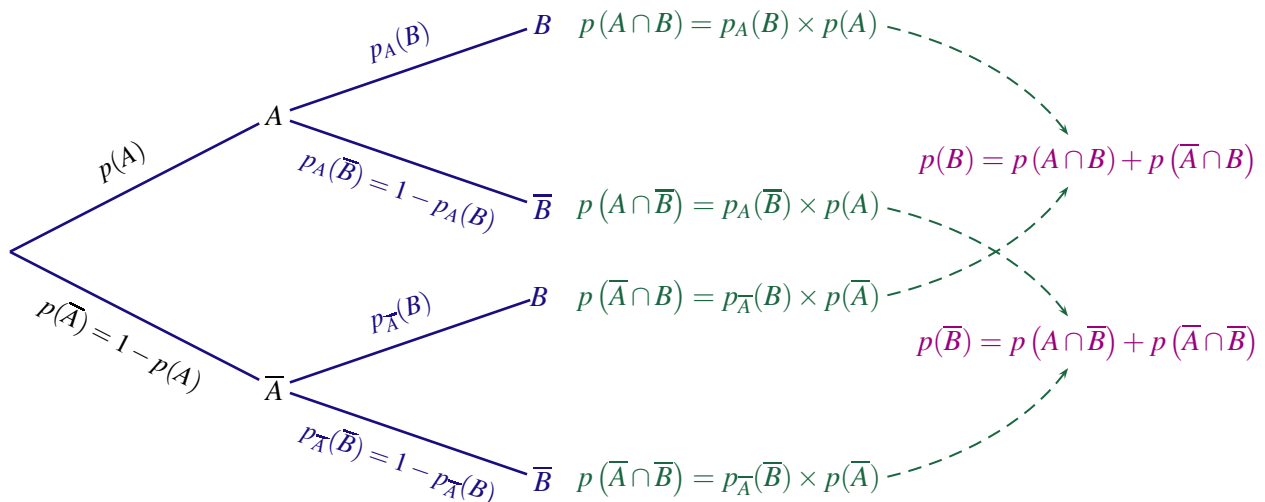
RÈGLES

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités figurant sur ses branches.
- La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités de tous les chemins menant à un sommet où apparaît cet évènement.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

PROBABILITÉS COMPOSÉES

PROBABILITÉS TOTALES



IV ÉVÈNEMENTS INDÉPENDANTS

1 INDÉPENDANCE DE DEUX ÉVÈNEMENTS

Dire que deux événements A et B sont indépendants signifie que :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

Dire que deux événements sont indépendants signifie que la réalisation de l'un ne modifie pas la réalisation de l'évènement de l'autre.

2 PROPRIÉTÉ

Si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$ on a les équivalences :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants} \iff p_B(A) = p(A) \iff p_A(B) = p(B)$$

Preuve :

Si $p(A) \neq 0$, alors $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B)$. Ainsi, A et B sont indépendants si, et seulement si,

$$p(A) \times p(B) = p(A) \times p_A(B) \iff p(B) = p_A(B)$$

3 LOI BINOMIALE

SCHÉMA DE BERNOULLI

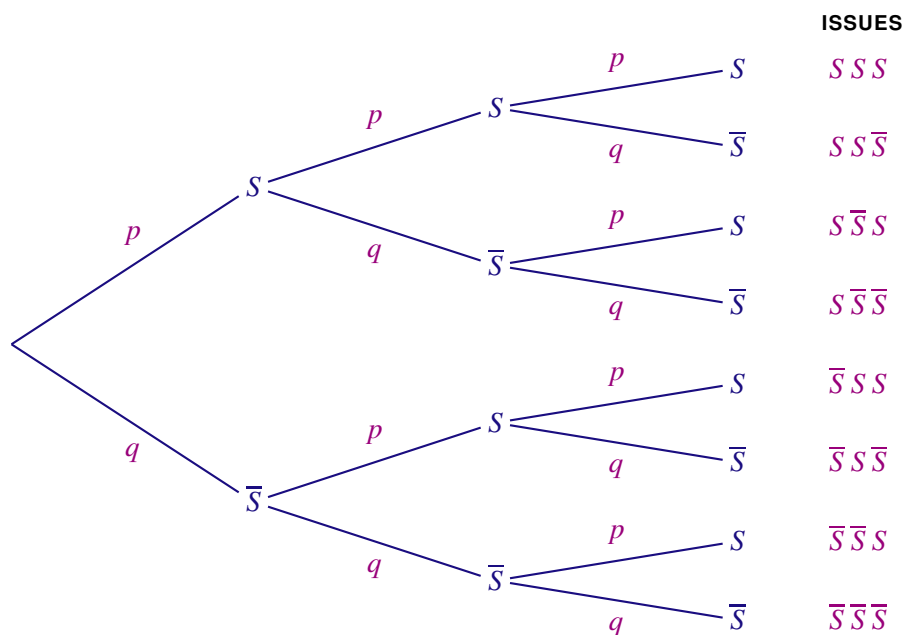
Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire ayant deux issues, l'une appelée « succès » de probabilité p et l'autre appelée « échec » de probabilité $q = 1 - p$.

La répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes s'appelle un schéma de Bernoulli.

EXEMPLE

On répète 3 fois une épreuve de Bernoulli successivement et de façon indépendante.

La probabilité du succès est $p(S) = p$, la probabilité de l'échec est $p(\bar{S}) = 1 - p = q$.



L'expérience comporte huit issues, chacune de ces issues pouvant être schématisée à l'aide d'un mot de trois lettres :

$$\{SSS; SS\bar{S}; S\bar{S}S; \bar{S}SS; S\bar{S}\bar{S}; \bar{S}S\bar{S}; \bar{S}\bar{S}S; \bar{S}\bar{S}\bar{S}\}$$

COEFFICIENTS BINOMIAUX

On répète successivement n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

On appelle coefficient binomial et on note $\binom{n}{k}$ le nombre de chemins réalisant k succès parmi n épreuves de Bernoulli répétées.

Dans l'exemple précédent, il y a $\binom{3}{2} = 3$ chemins pour lesquels il y a deux succès

LOI BINOMIALE

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de succès obtenus dans un schéma de Bernoulli à n épreuves où la probabilité du succès de chaque épreuve est p .

La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètres n et p .

Cette loi est notée $\mathcal{B}(n; p)$. Elle est définie par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \text{ pour tout entier } k \text{ tel que } 0 \leq k \leq n$$

Remarque :

L'évènement « obtenir au moins un succès » est l'évènement contraire de l'évènement F « obtenir n échecs consécutifs » d'où

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (1 - p)^n$$

EXEMPLE

La loi de probabilité de la loi binomiale $\mathcal{B}(4; p)$ de paramètres 4 et p (avec $q = 1 - p$) est :

k	0	1	2	3	4
$P(X = k)$	q^4	$4 \times p \times q^3$	$6 \times p^2 \times q^2$	$4 \times p^3 \times q$	p^4

EXERCICE 1

Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :

- 13,5 % des bovins d'un troupeau sont malades et ont réagi au test ;
- 1,5 % des bovins du troupeau sont malades et n'ont pas réagi au test ;
- 84,8 % des bêtes n'ont pas réagi au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Calculer la probabilité que le test soit négatif sachant que l'animal n'est pas malade.
2. Calculer la probabilité que l'animal ne soit pas malade sachant que le test est négatif.

EXERCICE 2

Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :

- 12 % des bovins ont la maladie M ;
- Quand un bovin est malade, le test est positif dans 95 % des cas ;
- 98 % des bêtes saines ne réagissent pas au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Quelle est la probabilité pour un animal d'être malade et de réagir au test ?
2. On prend un animal au hasard et on lui fait passer le test quelle est la probabilité pour que le test soit positif ?
3. On veut déterminer la fiabilité de ce test. Calculer la probabilité :
 - a) pour un animal d'être malade si il réagit au test ;
 - b) pour un animal d'être sain si il ne réagit pas au test.

EXERCICE 3

Une maladie M affecte les bovins d'un pays. On a mis au point un test pour détecter cette maladie. On estime que :

- 20 % des bovins d'un troupeau sont malades ;
- 20,6 % des bovins du troupeau ont eu un test positif ;
- 1 % des bovins du troupeau sont malades et n'ont pas réagi au test.

On prend un animal de ce troupeau au hasard.

1. Calculer la probabilité que le test soit négatif sachant que l'animal n'est pas malade.
2. Calculer la probabilité que l'animal ne soit pas malade sachant que le test est négatif.

EXERCICE 4

D'après une étude de la direction du tourisme concernant l'ensemble des résidents Français :

Est défini comme "voyage" , tout départ du domicile, retour à celui-ci avec au moins une nuit passée en dehors.

Ces voyages se décomposent en "séjours" de deux sortes :

- Séjours courts définis par le fait d'avoir passé entre une nuit et trois nuits en lieu fixe ;
- Séjours longs définis par le fait d'avoir passé au moins quatre nuits en lieu fixe.

Le mode d'hébergement d'un séjour peut être marchand (hôtel, camping, gîte etc ...) ou non marchand.

On considère que sur l'ensemble des résidents Français qui ont effectué au moins un voyage :

- Les séjours courts représentent 55% de l'ensemble des séjours ;

- 43% des séjours longs se font en hébergement marchand ;
 - 36,4% de l'ensemble des séjours se font en hébergement marchand.
- On interroge au hasard, un résident Français ayant effectué un voyage et on note :

- L : « l'évènement la personne a fait un séjour long » ;
 - M : l'évènement « le mode d'hébergement du séjour est marchand » ;
1. Calculer la probabilité que la personne interrogée ait effectué un séjour long.
 2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
 3. a) Calculer la probabilité que la personne interrogée ait effectué un séjour long en hébergement marchand.
b) En déduire la probabilité que la personne interrogée ait effectué un séjour court en hébergement marchand.
 4. Un résident Français effectue un séjour court, quelle est la probabilité qu'il choisisse un hébergement marchand ?
 5. On interroge au hasard, un résident Français ayant choisi un hébergement non marchand au cours de son séjour. Quelle est la probabilité que le séjour de cette personne soit un séjour long ?

EXERCICE 5

PARTIE A

Une usine produit des articles dont 3 % présentent des défauts. En vue d'un contrôle de qualité, on constitue au hasard un échantillon de 60 articles tirés de la production.

La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler ce prélèvement à la répétition de 60 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

On désigne par X la variable aléatoire qui associe à tout échantillon de 60 articles le nombre d'articles défectueux.

1. Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ?
2. Déterminer une valeur arrondie à 10^{-3} près de la probabilité chacun des évènements suivants :
 - a) « L'échantillon contient au moins un article défectueux » ;
 - b) « L'échantillon contient au plus trois articles défectueux ».

PARTIE B

La direction de l'usine décide de mettre en place un contrôle de qualité. Le contrôle des articles produits s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

- sachant qu'un article est sans défaut, on l'accepte avec une probabilité de 0,99 ;
- sachant qu'un article présente des défauts, on le refuse avec une probabilité de 0,96.

Les articles acceptés à l'issue du contrôle de qualité sont mis en vente.

On prélève au hasard dans la production de l'entreprise un article qui va être contrôlé.

On note les évènements suivants :

- D : « L'article présente des défauts » ;
- V : « L'article est mis en vente ».

$\bar{D}$ et $\bar{V}$ sont respectivement les évènements contraires des évènements D et V .

1. a) Calculer la probabilité qu'un article présente des défauts et soit mis en vente.
b) Montrer que la probabilité qu'un article soit mis en vente à l'issue du contrôle de qualité est égale à 0,9615.
2. La direction de l'usine souhaite que parmi les articles mis en vente il y ait moins de 0,1 % d'articles défectueux.
Ce contrôle de qualité permet-il d'atteindre cet objectif ?

EXERCICE 6

(D'après sujet bac Antilles Septembre 2005)

Dans cet exercice, A et B étant des évènements, $\bar{A}$ désigne l'évènement contraire de l'évènement A , $P(A)$ la probabilité de A et $P_B(A)$ la probabilité de A sachant que B est réalisé.

Une entreprise fabrique des appareils en grand nombre. Une étude statistique a permis de constater que 10 % des appareils fabriqués sont défectueux.

L'entreprise décide de mettre en place un test de contrôle de ces appareils avant leur mise en vente. Ce contrôle détecte et élimine 80 % des appareils défectueux, mais il élimine également à tort 10 % des appareils non défectueux. Les appareils non éliminés sont alors mis en vente.

On prend au hasard un appareil fabriqué et on note D l'évènement « l'appareil est défectueux » et V l'évènement « l'appareil est mis en vente ».

1. Construire un arbre pondéré rendant compte de cette situation.

2. a) Calculer $P(V \cap D)$ et $P(V \cap \bar{D})$.

En déduire que la probabilité qu'un appareil fabriqué soit mis en vente après contrôle est 0,83.

b) Calculer la probabilité qu'un appareil mis en vente après contrôle soit défectueux.

c) Vérifier que $P_V(D) \approx 0,24 \times P(D)$.

Rédiger une phrase comparant les probabilités pour un acheteur d'acquérir un appareil défectueux suivant que l'entreprise applique ou non le test de contrôle.

3. Une entreprise décide d'appliquer le contrôle, tout en continuant à fabriquer le même nombre d'appareils. Elle fabriquait et vendait une quantité q_0 d'appareils au prix p_0 .

Les pourcentages demandés seront arrondis à l'unité.

a) Quelle est, en fonction de q_0 la nouvelle quantité q_1 d'appareils mis en vente après contrôle ?

b) De quel pourcentage la quantité vendue a-t-elle diminué ?

c) Quel doit être le nouveau prix p_1 (en fonction de p_0 pour que l'entreprise maintienne son chiffre d'affaires ? Quel est alors le pourcentage d'augmentation du prix de vente ?

EXERCICE 7

(D'après sujet bac Liban 2013)

Un propriétaire d'une salle louant des terrains de squash s'interroge sur le taux d'occupation de ses terrains. Sachant que la location d'un terrain dure une heure, il a classé les heures en deux catégories : les heures pleines (soir et week-end) et les heures creuses (le reste de la semaine). Dans le cadre de cette répartition, 70 % des heures sont creuses.

Une étude statistique sur une semaine lui a permis de s'apercevoir que :

— lorsque l'heure est creuse, 20 % des terrains sont occupés ;

— lorsque l'heure est pleine, 90 % des terrains sont occupés.

On choisit un terrain de la salle au hasard. On notera les évènements :

— C : « l'heure est creuse »

— T : « le terrain est occupé »

1. Représenter cette situation par un arbre de probabilités.

2. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé et que l'heure soit creuse.

3. Déterminer la probabilité que le terrain soit occupé.

4. Montrer que la probabilité que l'heure soit pleine, sachant que le terrain est occupé, est égale à $\frac{27}{41}$.

Dans le but d'inciter ses clients à venir hors des heures de grande fréquentation, le propriétaire a instauré, pour la location d'un terrain, des tarifs différenciés : 10 € pour une heure pleine ; 6 € pour une heure creuse.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur la recette en euros obtenue grâce à la location d'un terrain de la salle, choisi au hasard. Ainsi, X prend 3 valeurs :

- 10 lorsque le terrain est occupé et loué en heure pleine,
 - 6 lorsque le terrain est occupé et loué en heure creuse,
 - 0 lorsque le terrain n'est pas occupé.
5. Construire le tableau décrivant la loi de probabilité de X .
 6. Déterminer l'espérance de X .
 7. La salle comporte 10 terrains et est ouverte 70 heures par semaine. Calculer la recette hebdomadaire moyenne de la salle.

EXERCICE 8

À une roue de loterie dans une fête foraine, un seul des huit secteurs de la roue permet de gagner un lot.

1. Après avoir gagné une partie, le joueur a la possibilité d'emporter son lot ou de le remettre en jeu pour gagner un « super lot ». La probabilité qu'un joueur emporte son lot sachant qu'il a gagné est 0,6.
Déterminer la probabilité qu'un joueur parte avec un « super lot » après une seule partie.
2. Un joueur achète un carnet de tickets lui permettant de faire cinq parties.
 - a) Déterminer la probabilité que le joueur gagne une seule fois sur les cinq parties.
 - b) Déterminer la probabilité que le joueur gagne au moins une fois sur les cinq parties.
 - c) Déterminer la probabilité que le joueur gagne au plus une fois sur les cinq parties.

EXERCICE 9

Une entreprise fabrique des articles en grande quantité.

Une étude statistique a permis de constater que 10% des articles fabriqués sont défectueux.

PARTIE A

On choisit au hasard successivement cinq pièces. On suppose que le nombre de pièces est suffisamment important pour que ces tirages s'effectuent dans des conditions identiques et de manière indépendante.

1. Calculer la probabilité qu'un seul des cinq articles soit sans défaut.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un des cinq articles soit sans défaut.

PARTIE B

Les articles fabriqués peuvent présenter au maximum deux défauts notés a et b .

On note :

A l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente le défaut a » ;

B l'évènement : « Un article prélevé au hasard présente le défaut b » ;

$\bar{A}$ et $\bar{B}$ les évènements contraires respectifs de A et B .

On donne les probabilités suivantes : $p(A) = 0,05$; $p(B) = 0,06$.

1. Quelle est la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard ne présente aucun défaut » ?
2. Calculer la probabilité de l'évènement « un article prélevé au hasard présente les deux défauts ».
3. On prélève au hasard un article parmi ceux qui présentent le défaut a . Calculer la probabilité que cet article présente également le défaut b .
4. Un article sans défaut est vendu à 150€. Un article qui présente seulement le défaut a est vendu avec une remise de 30%, un article qui présente seulement le défaut b est vendu avec une remise de 40% et un article qui a les deux défauts n'est pas vendu.
 - a) Établir la loi de probabilité du prix de vente en euros, noté X , d'un article.
 - b) Quel chiffre d'affaires l'entreprise peut-elle espérer réaliser sur la vente de 1000 articles ?

EXERCICE 10

PARTIE A

L'étude réalisée pour une entreprise de matériel informatique sur l'utilisation d'un modèle A de disque dur externe de son catalogue a permis d'établir que :

- 65% des acquéreurs utilisent le disque dur avec un ordinateur portable.
- 40% des acquéreurs qui utilisent le disque dur avec un ordinateur portable le font pour un usage professionnel.
- 28% des acquéreurs utilisent le disque dur avec un ordinateur fixe et pour un usage professionnel.

On choisit au hasard la fiche d'un client ayant acheté ce modèle de disque dur et on note :

- M l'évènement : « le client utilise le disque dur avec un ordinateur portable » ;
- T l'évènement : « le client utilise le disque dur pour un usage professionnel ».

1. Calculer la probabilité que la fiche soit celle d'un client qui fait un usage professionnel du disque dur externe sachant qu'il l'utilise avec un ordinateur fixe.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. Quelle est la probabilité que la fiche soit celle d'un client qui utilise le disque dur avec un ordinateur portable et pour un usage professionnel ?
4. Quelle est la probabilité que la fiche soit celle d'un client qui utilise le disque dur pour un usage professionnel ?
5. La fiche est celle d'un client qui utilise le disque dur pour un usage professionnel. Quelle est la probabilité que la fiche soit celle d'un client qui utilise le disque dur avec un ordinateur fixe ?

PARTIE B

Cette entreprise commercialise également un modèle B de disque dur mécanique. L'utilisation de ce modèle sur des serveurs a permis d'établir un taux de défaillance annuel de 2%.

Un client commande 50 disques durs du modèle B. Le nombre de disques durs fabriqués est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler le choix des 50 disques durs à un tirage aléatoire avec remise.

On note X la variable aléatoire égale au nombre disques durs susceptibles d'être en panne pendant l'année.

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité $P(X = 1)$ et interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.
3. Quelle est la probabilité qu'au moins un des disques durs achetés présente une défaillance au cours de l'année ?

EXERCICE 11

Une entreprise agroalimentaire fabrique des plats cuisinés destinés à la consommation. Ces préparations culinaires sont d'abord conditionnées dans des emballages sous vide puis étiquetées.

Le conditionnement de ces préparations peut présenter deux défauts : un emballage sous vide défectueux ou l'absence de la date limite de consommation sur l'étiquette.

PARTIE A

Une étude statistique a permis de constater que :

- 6 % des préparations ne sont pas correctement emballées ;
- la date limite de consommation est absente sur l'étiquette de 18 % des préparations qui ne sont pas correctement emballées et sur 3 % des préparations correctement emballées.

On prélève au hasard une préparation destinée à la vente et on considère les évènements suivants :

- E : « le plat est correctement emballé » ;
- D : « l'étiquette comporte une date limite de consommation ».

1. Calculer la probabilité de l'évènement $E \cap \overline{D}$.

2. Montrer que la probabilité d'une date limite de consommation absente sur l'étiquette est égale à 0,039.
3. La date limite de consommation ne figure pas sur l'étiquette, quelle est la probabilité que la préparation soit correctement emballée ?

PARTIE B

Les préparations culinaires correctement emballées sont commercialisées par l'entreprise.

On rappelle que parmi celles-ci, 3 % n'ont pas de date limite de consommation.

Un supermarché passe une commande de 60 plats cuisinés. Le stock est suffisamment important pour assimiler cette commande à un tirage aléatoire avec remise.

Pour un lot de 60 préparations, on note X la variable aléatoire égale au nombre de préparations sur lesquelles on note l'absence de date limite de consommation.

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. a) Calculer la probabilité $P(X = 0)$ et interpréter le résultat à l'aide d'une phrase. On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.
b) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité $P(X \geq 1)$.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer $P(X \geq 6)$.

EXERCICE 12

Une usine fabrique, en grande quantité, un certain type de pièces métalliques pour l'industrie.

PARTIE A

Les pièces sont fabriquées par deux machines a et b .

On considère que 2 % des pièces produites par la machine a sont défectueuses et que 7 % des pièces produites par la machine b sont défectueuses.

La machine a plus récente assure 80 % de la production quotidienne.

On prélève une pièce au hasard dans l'ensemble des pièces produites par les deux machines pendant une journée. Toutes les pièces ont la même probabilité d'être prélevées.

On considère les événements suivants :

- A : « la pièce prélevée a été fabriquée par la machine a » ;
- D : « la pièce prélevée est défectueuse ».

1. Calculer la probabilité que la pièce prélevée au hasard dans la production de la journée soit défectueuse et qu'elle ait été fabriquée par la machine a .
2. En déduire la probabilité que la pièce prélevée au hasard dans la production de la journée soit défectueuse.
3. La pièce prélevée au hasard dans la production de la journée est défectueuse, quelle est la probabilité qu'elle ait été fabriquée par la machine a ?

PARTIE B

On considère un stock important de pièces métalliques. On admet que 3 % des pièces de ce stock sont défectueuses.

On prélève au hasard 150 pièces dans le stock pour vérification. Le stock est assez important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de 150 pièces.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 150 pièces, associe le nombre de pièces de ce prélèvement qui sont défectueuses.

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que, dans un tel prélèvement, une pièce au moins soit défectueuse.
3. Ci-dessous est donné un extrait du tableau donnant les valeurs des probabilités $P(X \leq k)$, où k désigne un nombre entier naturel appartenant à l'intervalle $[0; 150]$.

k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$	k	$P(X \leq k)$
0	0,010 4	5	0,704 3	10	0,994 2
1	0,058 5	6	0,834 0	11	0,998 0
2	0,169 3	7	0,916 6	12	0,999 4
3	0,338 4	8	0,962 2	13	0,999 8
4	0,530 7	9	0,984 5	14	0,999 9

À l'aide de ce tableau ou de la calculatrice, déterminer $P(2 \leq X \leq 8)$, la probabilité que le nombre de pièces défectueuses dans un lot de 150 soit compris entre 2 et 8.

EXERCICE 13

Une entreprise produit en grande quantité des composants électroniques destinés à l'industrie.

Un contrôle de qualité a permis d'établir que les composants fabriqués pouvaient présenter au maximum deux défauts : la puce électronique est défectueuse ou un défaut d'assemblage.

On a constaté d'autre part, que 1,6 % des composants fabriqués avaient une puce électronique défectueuse et que 3,5 % des composants dont la puce n'est pas défectueuse présentaient un défaut d'assemblage.

Si le composant ne présente aucun défaut, on dit qu'il est conforme. Sinon, le composant est dit hors d'usage.

PARTIE A

On prélève au hasard un composant produit par cette entreprise. Tous les composants ont la même probabilité d'être prélevés.

On note :

— D l'évènement « la puce électronique est défectueuse » ;

— C l'évènement « le composant est conforme ».

Calculer la probabilité arrondie à 10^{-3} près de la probabilité que le composant soit hors d'usage.

PARTIE B

On prélève 100 composants au hasard. La production est suffisamment importante pour assimiler ce choix de 100 composants à un tirage avec remise de 100 composants.

On suppose que la probabilité qu'un composant soit hors d'usage est 0,05.

On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 100 composants, associe le nombre de composants hors d'usage.

- La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.
 - Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X .
- Calculer la probabilité de l'évènement A : « tous les composants prélevés sont conformes ».
- Calculer la probabilité $P(X = 5)$ et interpréter le résultat à l'aide d'une phrase.
- Calculer la probabilité de l'évènement B : « au moins deux composants prélevés sont hors d'usage ».
- On constate que dans cet échantillon, 8 composants sont hors d'usage.
 - À l'aide de la calculatrice, déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) > 0,025$ et le plus petit entier b tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.
 - Peut-on rejeter l'hypothèse que 5 % des composants fabriqués sont hors d'usage ?

Rappel :

Un intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence correspondant à la réalisation sur un échantillon de taille n , d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ est l'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right]$ où :

a est le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$;

b est le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

EXERCICE 14

(D'après sujet BTS)

Une société, spécialiste en équipements et accessoires de bureautique, souhaite commercialiser un nouveau modèle de photocopieur multifonction dont l'une des caractéristiques est la correction de QCM.

Dans le but de respecter le plan marketing établi, l'un de ces photocopieurs est installé pour une période d'essai dans le secrétariat pédagogique d'une université.

Les étudiants de cette université ont passé une épreuve de culture générale, sous la forme d'un QCM. Les documents réponses ont été ensuite corrigés par ce photocopieur.

Une étude a été réalisée afin d'évaluer la fréquence des erreurs de correction et le temps nécessaire à cette correction.

PARTIE A

On prélève au hasard un document réponse de cette épreuve. Tous les documents réponses ont la même probabilité d'être tirés.

Lors de cette étude, 85 % des documents réponses ont été complétés en noir et le reste dans une autre couleur.

La probabilité qu'un document réponse présente au moins une erreur de correction sachant que la couleur utilisée pour y répondre est le noir, est égale à 0,001.

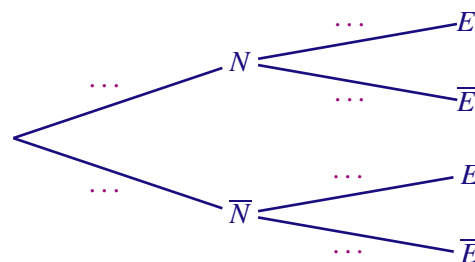
La probabilité qu'un document réponse présente au moins une erreur de correction sachant que la couleur utilisée pour y répondre n'est pas le noir, est égale à 0,1.

On définit les événements suivants :

— E : « Le document, réponse présente au moins une erreur de correction » ;

— N : « Le document réponse a été complété en noir ».

1. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous qui illustre la situation précédente.



2. Dans cette question, on donnera les valeurs exactes.

a) Justifier que $P(N \cap E) = 0,00085$.

b) Calculer la probabilité de l'évènement $\overline{N} \cap E$.

c) En déduire la probabilité $P(E)$.

3. Quelle est la probabilité, donnée à 10^{-3} près, que le document prélevé soit écrit en noir, sachant qu'il présente au moins une erreur de correction ?

PARTIE B

On appelle document « mal corrigé » un document réponse présentant au moins une erreur de correction.

La proportion de documents « mal corrigés » est arrondie à 1,6 %.

On prélève au hasard 100 documents réponses. Le nombre de documents réponses est suffisamment grand pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de documents réponses « mal corrigés » parmi les 100 choisis.

1. La variable aléatoire X suit une loi binomiale. Préciser les paramètres de cette loi.

2. a) Calculer la probabilité $P(X = 0)$ et interpréter le résultat à l'aide d'une phrase. On donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

b) En déduire une valeur approchée à 10^{-3} près de la probabilité $P(X \geq 1)$.

3. Peut-on affirmer que la probabilité qu'au plus 4 documents réponses sur 100 soient « mal corrigés » est supérieure ou égale à 0,95 ?

Chapitre 5

FONCTION LOGARITHME

I	FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN	70
1	Définition	70
2	Conséquences	70
II	PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES	71
1	Propriété fondamentale	71
2	Autres règles de calcul	71
III	ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN	72
1	Dérivée	72
2	Variation	72
3	Courbe représentative	73
	EXERCICES	74

I FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

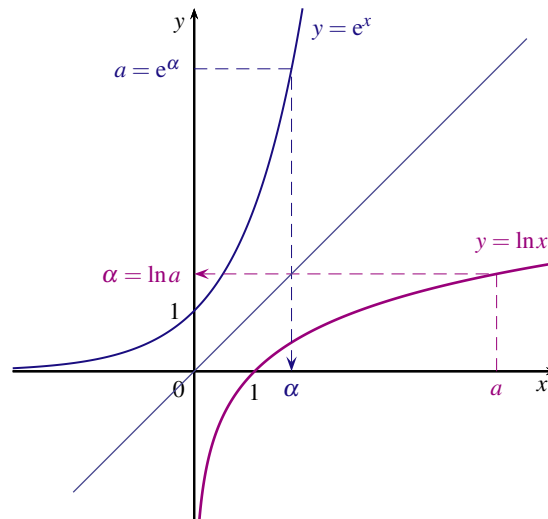
La fonction exponentielle est continue, strictement croissante et pour tout réel x , $e^x \in]0; +\infty[$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ admet une unique solution, c'est à dire que :

pour tout réel a strictement positif, il existe un unique réel α tel que $e^\alpha = a$

On définit une nouvelle fonction appelée logarithme népérien qui à tout réel strictement positif, associe son unique antécédent par la fonction exponentielle.

On dit que la fonction logarithme népérien est la fonction réciproque de la fonction exponentielle.



Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme népérien sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

1 DÉFINITION

La fonction logarithme népérien, notée $\ln$, est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui à tout réel x strictement positif, associe le réel y tel que $e^y = x$.

$$x > 0 \text{ et } y = \ln(x) \text{ équivaut à } x = e^y$$

REMARQUES

- On note $\ln x$, au lieu de $\ln(x)$, le logarithme népérien de x , lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.
- $e^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$.
- $e^1 = e$ donc $\ln(e) = 1$.
- Pour tout réel $a > 0$, l'équation $e^x = a$ a pour unique solution $x = \ln a$.

2 CONSÉQUENCES

1. Pour tout réel x strictement positif, $e^{\ln x} = x$.
2. Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.

DÉMONSTRATION

1. Pour tout réel $x > 0$, $y = \ln x \iff e^y = x$ donc $e^{\ln x} = x$.
2. Pour tout réel x , $e^x = y \iff \ln(y) = x$ soit $\ln(e^x) = x$.

II PROPRIÉTÉS ALGÈBRIQUES

1 PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$$

DÉMONSTRATION

Soient $a > 0$ et $b > 0$ deux réels strictement positifs,

Par définition de la fonction logarithme népérien : $a = e^{\ln a}$, $b = e^{\ln b}$ et $a \times b = e^{\ln(a \times b)}$

D'autre part,

$$a \times b = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = e^{\ln a + \ln b}$$

D'où

$$e^{\ln(a \times b)} = e^{\ln a + \ln b}$$

Donc $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$.

REMARQUE

John Napier publia en 1614 une méthode de calcul transformant les multiplications en additions : les logarithmes, du grec *logos* (rapport, raison) et *arithmos* (nombre).

2 AUTRES RÈGLES DE CALCUL

Pour tous réels a et b strictement positifs et n entier relatif :

$$1. \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

$$2. \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$3. \ln(a^n) = n \ln a$$

$$4. \ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$$

DÉMONSTRATIONS

1. Soit $a > 0$ alors $\frac{1}{a} > 0$. Or $a \times \frac{1}{a} = 1$ donc

$$\ln\left(a \times \frac{1}{a}\right) = \ln 1 \iff \ln a + \ln \frac{1}{a} = 0 \iff \ln \frac{1}{a} = -\ln a$$

2. Soient $a > 0$ et $b > 0$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b$$

3. Soient $a > 0$ un réel strictement positif et n un entier relatif,

$$e^{\ln(a^n)} = a^n \text{ et } e^{n \ln a} = (e^{\ln a})^n = a^n$$

Donc $e^{\ln(a^n)} = e^{n \ln a}$ et par conséquent, $\ln(a^n) = n \ln a$.

4. Soit $a > 0$ alors $(\sqrt{a})^2 = a$ donc

$$\ln a = \ln(\sqrt{a})^2 = 2 \ln \sqrt{a}$$

III ÉTUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN

1 DÉRIVÉE

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

DÉMONSTRATION

On admet que la fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^{\ln x}$.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \ln'(x) \times e^{\ln x} = \ln'(x) \times x$.

Or pour tout réel $x > 0$, $f(x) = x$ d'où $f'(x) = 1$

Ainsi pour tout réel $x > 0$, $\ln'(x) \times x = 1$ donc $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

2 VARIATION

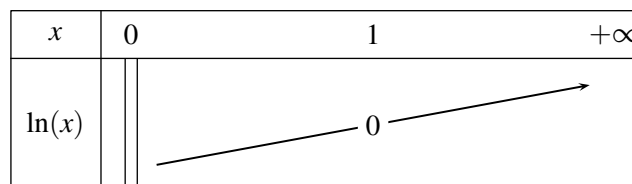
La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

DÉMONSTRATION

La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0; +\infty[$ donc continue sur cet intervalle.

La dérivée de la fonction $\ln$ est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\ln'(x) = \frac{1}{x}$. Or si $x > 0$ alors, $\frac{1}{x} > 0$.

La dérivée de la fonction $\ln$ est strictement positive, donc la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.



CONSÉQUENCES

On déduit de ce théorème les propriétés suivantes :

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$\ln a = \ln b$ si, et seulement si, $a = b$

$\ln a > \ln b$ si, et seulement si, $a > b$

Puisque $\ln 1 = 0$:

Pour tout réel x strictement positif :

$\ln x = 0$ si, et seulement si, $x = 1$

$\ln x > 0$ si, et seulement si, $x > 1$

$\ln x < 0$ si, et seulement si, $0 < x < 1$

Comme la fonction logarithme népérien est continue, strictement croissante et que pour tout réel $x > 0$, $\ln x \in \mathbb{R}$ alors, d'après le théorème de la valeur intermédiaire :

Pour tout réel k , l'équation $\ln x = k$ admet dans l'intervalle $]0; +\infty[$ une unique solution $x = e^k$.

3 COURBE REPRÉSENTATIVE

Notons $\mathcal{C}_{\ln}$ la courbe représentative de la fonction logarithme népérien.

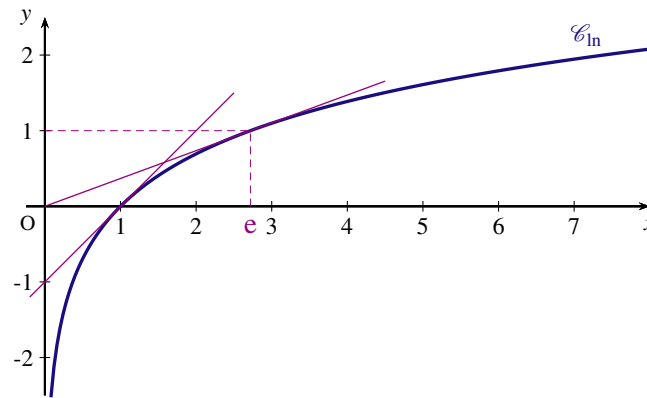
- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$ donc les points $A(1;0)$ et $B(e;1)$ appartiennent à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$.
- Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ au point $A(1;0)$ est $\ln'(1) = 1$.
Donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ au point $A(1;0)$ a pour équation : $y = x - 1$.
- Le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ au point $B(e;1)$ est $\ln'(e) = \frac{1}{e}$.
Donc la tangente à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ au point $B(e;1)$ a pour équation :

$$y = \frac{1}{e}(x - e) + 1 \iff y = \frac{1}{e}x$$

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ au point d'abscisse e passe par l'origine du repère.

- Comme la fonction inverse est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$, la dérivée de la fonction $\ln$ est strictement décroissante.

Par conséquent, la fonction $\ln$ est concave sur $]0; +\infty[$.



EXERCICE 1

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$A = \ln 10\,000 - \ln 0,1 + \ln 0,01; \quad B = \ln(32) - 7\ln(2) - 4\ln\left(\frac{1}{8}\right); \quad C = 8\ln(\sqrt{3}) + 5\ln(9) - \ln(9\sqrt{3});$$

$$D = \frac{\ln 5 - \ln 10}{2\ln(\sqrt{2})}; \quad E = \frac{\ln(\sqrt{3}-1) + \ln(\sqrt{3}+1)}{2}; \quad F = \frac{\frac{1}{3}\ln 9 - 4\ln\sqrt{3} - \ln\frac{1}{3}}{\ln 3}.$$

EXERCICE 2

Simplifier l'écriture des nombres suivants :

$$A = \ln(e^{-3}) + e^{-\ln 2}; \quad B = \frac{\ln e}{\ln(e^2)} - \ln\left(\frac{1}{e}\right); \quad C = \ln(4e^2) + \ln\left(\frac{2}{\sqrt{e}}\right); \quad D = \frac{\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)}{\ln 3} \times \frac{\ln 9}{e^2}$$

EXERCICE 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation, puis donner une valeur arrondie à 10^{-3} près des solutions :

$$1. \quad a) e^x = 5; \quad b) 2e^x = 0,2; \quad c) e^{2x-1} - 3 = 0; \quad d) (e^x)^2 = 0,25; \quad e) 2e^{x^2} - 4 = 0.$$

$$2. \quad a) e^{1-2x} = 3e^x; \quad b) 3e^{-2x} = 2e^{2+3x}; \quad c) \frac{5e^{3x+1}}{e^{2x}} = 4; \quad d) (e^{-x} + 1)(e^{2+3x} - 2) = 0.$$

EXERCICE 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$a) 4e^{2x+1} \leq 3; \quad b) 3e^{-2x} > 1; \quad c) (e^{2x})^3 - \frac{2}{e^x} \leq 0; \quad d) \frac{5e^{2-3x}}{e^{2x-1}} > 2; \quad e) 3e^{2x} - 7e^x + 2 \leq 0.$$

EXERCICE 5

1. Résoudre dans $]0; +\infty[$ chaque équation, puis donner une valeur arrondie à 10^{-3} près des solutions :

$$a) \ln x = -1; \quad b) 2\ln x + 0,01 = 0; \quad c) 3\ln x = e^3; \quad d) 2(\ln x)^2 = 1; \quad e) (e^{2x} - 2)(\ln(2x) - 2) = 0.$$

2. Résoudre dans $]0; +\infty[$ les inéquations suivantes :

$$a) 2\ln x \leq -2; \quad b) \ln 2x \leq -2; \quad c) \ln \frac{1}{x} - \ln x \geq 0; \quad d) \ln(3x) - 2\ln x < 5; \quad e) (\ln x)^2 + \frac{3\ln x}{2} - 1 \geq 0.$$

EXERCICE 6

Démontrer les propriétés suivantes :

$$1. \text{ Pour tout réel } x > 1, \ln(x^2 + x - 2) = \ln(x+2) + \ln(x-1)$$

$$2. \text{ Pour tout réel } x \text{ strictement positif, } \ln(x+1) = \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

EXERCICE 7

Dans chacun des cas suivants, déterminer le plus petit entier n solution de l'inéquation :

$$a) 1,05^n \geq 1,5; \quad b) 0,92^n \leq 0,75; \quad c) \left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \geq 2; \quad d) 0,2 \geq \left(1 - \frac{9}{100}\right)^n$$

EXERCICE 8

Un groupe industriel s'engage à réduire ses émissions de polluants de 4% par an.

En 2015, la masse de polluants émise dans l'atmosphère était de 50 000 tonnes.

1. Pour tout entier naturel n , on note u_n la masse, exprimée en tonnes, de polluants émise dans l'atmosphère pour l'année $(2015 + n)$. Exprimer u_n en fonction de n .

2. À partir de quelle année, la masse de polluants émise dans l'atmosphère par ce groupe industriel aura diminué d'au moins 40 % ?

EXERCICE 9

Le livret A est un compte d'épargne rémunéré. Les intérêts du Livret A sont calculés par quinzaine, le 1^{er} et le 16 de chaque mois. (Il existe 24 quinzaines dans l'année : deux quinzaines par mois). Au 31 décembre de chaque année, l'intérêt acquis s'ajoute au capital et générera lui-même des intérêts l'année suivante.

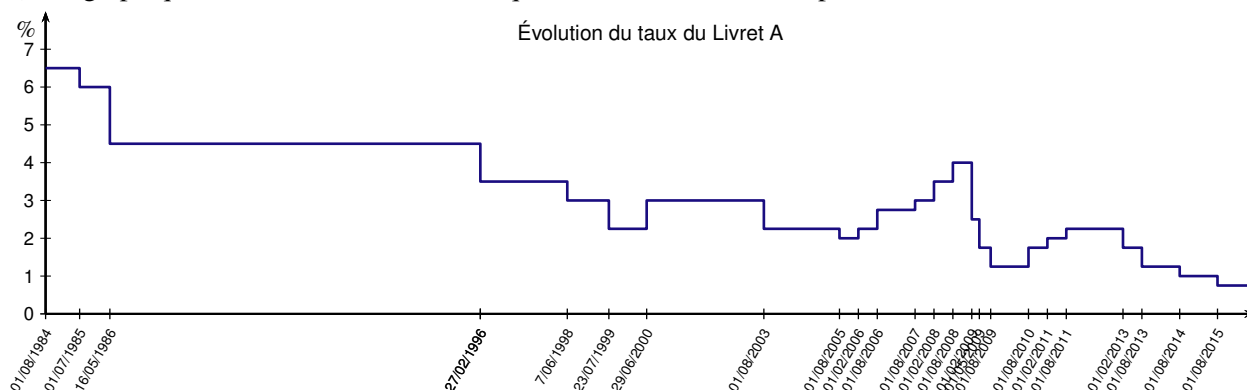
En dehors de circonstances exceptionnelles, le taux du Livret A peut être révisé deux fois par an, au 1^{er} février et au 1^{er} août. L'historique des derniers changements du taux de rémunération du Livret A est donné dans le tableau suivant :

Date d'application	1 ^{er} août 2011	1 ^{er} février 2013	1 ^{er} août 2013	1 ^{er} août 2014	1 ^{er} août 2015
Taux	2,25 %	1,75 %	1,25 %	1 %	0,75 %

PARTIE A

Un capital de 18 000 euros a été placé sur le Livret A au 31 décembre 2012.

- Vérifier que le capital disponible au 31 décembre 2013 est égal à 18 285 €.
 - Calculer le montant du capital disponible au 31 décembre 2016.
- Calculer le taux d'intérêt annuel moyen de ce placement sur quatre ans.
- Depuis le 1^{er} janvier 2013, le montant maximum que l'on peut verser sur un Livret A est de 22 950 euros (la capitalisation des intérêts peut toutefois porter le solde du Livret A au-delà de cette limite).
 - En supposant que le taux du Livret A reste inchangé, au bout de combien d'années, le capital placé sur le livret A aura-t-il dépassé le montant maximum ?
 - Le graphique ci-dessous donne l'historique du taux du Livret A depuis août 1984 :



La conclusion précédente, est-elle pertinente ?

PARTIE B

En matière de placements, l'inflation est à prendre en compte pour déterminer le vrai rendement d'un placement. L'inflation correspondant à une dépréciation de la valeur de la monnaie, on calcule le taux d'intérêt réel en corrigeant le taux d'intérêt nominal des effets de l'inflation afin de vérifier si un montant épargné va gagner ou perdre en pouvoir d'achat au fil du temps.

Le taux d'intérêt réel est défini par la quantité de biens et services supplémentaire qui pourra être acquise au bout d'un an rapportée à la quantité qui aurait pu être achetée au moment du placement.

- Soit t le taux d'intérêt nominal annuel du Livret A, i le taux annuel de l'inflation et R le taux d'intérêt annuel réel. Justifier que : $R = \frac{1+t}{1+i} - 1$.
- On donne ci-dessous les variations annuelles en pourcentage de l'indice des prix à la consommation en France (IPC)

Année	2013	2014	2015	2016
Taux d'inflation	0,86 %	0,51 %	0,04 %	0,5 %

- a) Calculer le taux d'intérêt annuel réel du Livret A pour les années 2013 à 2016.
- b) Calculer le taux d'intérêt réel moyen de ce placement sur quatre ans.

EXERCICE 10

En 2014, le parc informatique d'une entreprise était de 200 ordinateurs.

Pour renouveler ce parc et tenir compte des besoins de l'entreprise, chaque année le gestionnaire supprime 10 % des ordinateurs les plus anciens et achète 30 ordinateurs neufs.

Le nombre d'ordinateurs du parc informatique de cette entreprise est modélisé par la suite (u_n) où le terme u_n désigne le nombre d'ordinateurs disponibles au cours de l'année $(2014 + n)$.

Ainsi, la suite (u_n) est définie par $u_0 = 200$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,9u_n + 30$.

1. Calculer le nombre d'ordinateurs en 2015 et en 2016.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 300$.
 - a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - b) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n = 300 - 100 \times 0,9^n$.
3. En quelle année, le nombre d'ordinateurs disponibles dans cette entreprise sera-t-il supérieur à 250 ?

EXERCICE 11

Une entreprise produit des articles, dont certains sont défectueux à cause de deux défauts possibles, un défaut d'assemblage ou un défaut de finition, à l'exclusion de tout autre défaut.

Une étude statistique a permis de constater que sur l'ensemble de la production :

- 9 % des articles présentent les deux défauts.
- 15 % des articles présentent un défaut d'assemblage.
- 4 % des articles n'ayant pas un défaut d'assemblage ont un défaut de finition.

On choisit un article au hasard et on note :

- A l'évènement : « l'article a un défaut d'assemblage » ;
- F l'évènement : « l'article a un défaut de finition ».

1. a) Calculer $p(F)$.
b) Calculer la probabilité de l'évènement $A \cup F$: « l'article est de fabrication défectueuse ».
2. On prélève au hasard n articles. On suppose que le nombre d'articles est suffisamment grand pour assimiler ce prélèvement à des tirages successifs indépendants avec remise.
 - a) On note p_n la probabilité que l'un au moins de ces n articles soit défectueux. Justifier que $p_n = 1 - 0,816^n$.
 - b) Quel est le nombre minimal d'articles qu'il faut prélever pour que la probabilité que l'un au moins de ces articles soit défectueux soit supérieure à 0,98 ?

EXERCICE 12

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée f' de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$:

- a) $f(x) = x \ln x - x$; b) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$; c) $f(x) = \frac{\ln x}{e^x}$; d) $f(x) = (\ln x)^2 + 2 \ln(x)$

EXERCICE 13

Soit f la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{\ln x}{x}$.

1. Résoudre sur l'intervalle I , l'inéquation $f(x) \geq 1$.
2. On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f .
 - a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

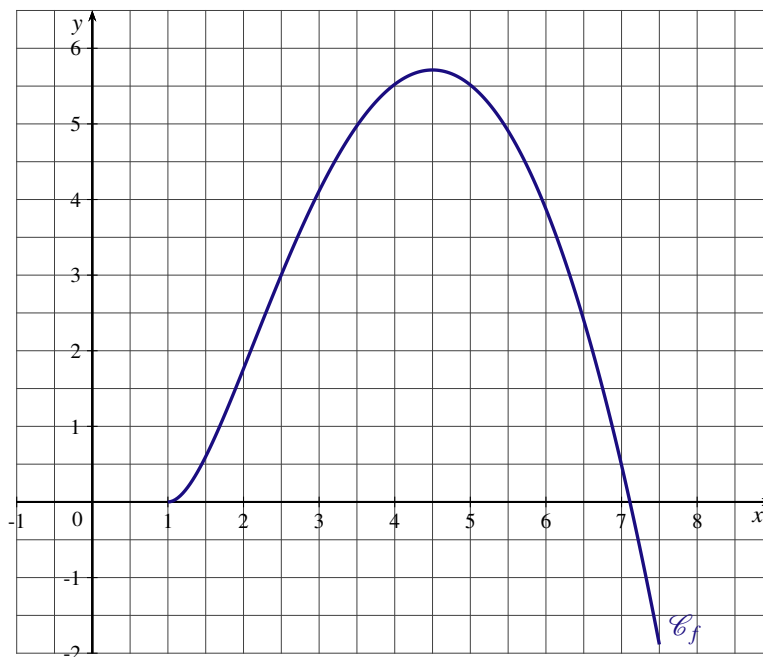
b) Étudier les variations de la fonction f sur I .

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α . Donner la valeur arrondie au centième de α .

EXERCICE 14

PARTIE A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[1; 7,5]$ par $f(x) = -x^2 + 11x - 9\ln(x) - 10$.
On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.



1. a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1; 7,5]$, on a $f'(x) = \frac{-2x^2 + 11x - 9}{x}$.
b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1; 7,5]$.
c) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur cet intervalle.
2. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.

PARTIE B : Application à l'économie

Une entreprise fabrique des pièces. Sa production quotidienne varie entre 100 pièces et 750 pièces.
Le bénéfice de l'entreprise en milliers d'euro, pour x centaines de pièces fabriquées et vendues ($1 \leq x \leq 7,5$), est modélisé par $f(x)$, où f est la fonction définie dans la partie A.

1. Déterminer le nombre de pièces que doit fabriquer l'entreprise afin d'obtenir le bénéfice maximal. Calculer ce bénéfice maximal, arrondi à la centaine d'euro.
2. a) Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans l'intervalle $[7; 7,5]$.
b) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer un intervalle d'amplitude 10^{-2} de la solution de l'équation $f(x) = 0$.

Initialisation a prend la valeur 7 b prend la valeur 7,5 Traitement Tant que $b - a > 0,01$ faire m prend la valeur $\frac{a+b}{2}$ alors Si $f(m) < 0$ alors b prend la valeur ... Sinon ... prend la valeur ... Fin de Tant que Sortie Afficher $(a; b)$
--

c) Exécuter l'algorithme précédent en complétant le tableau ci-dessous.

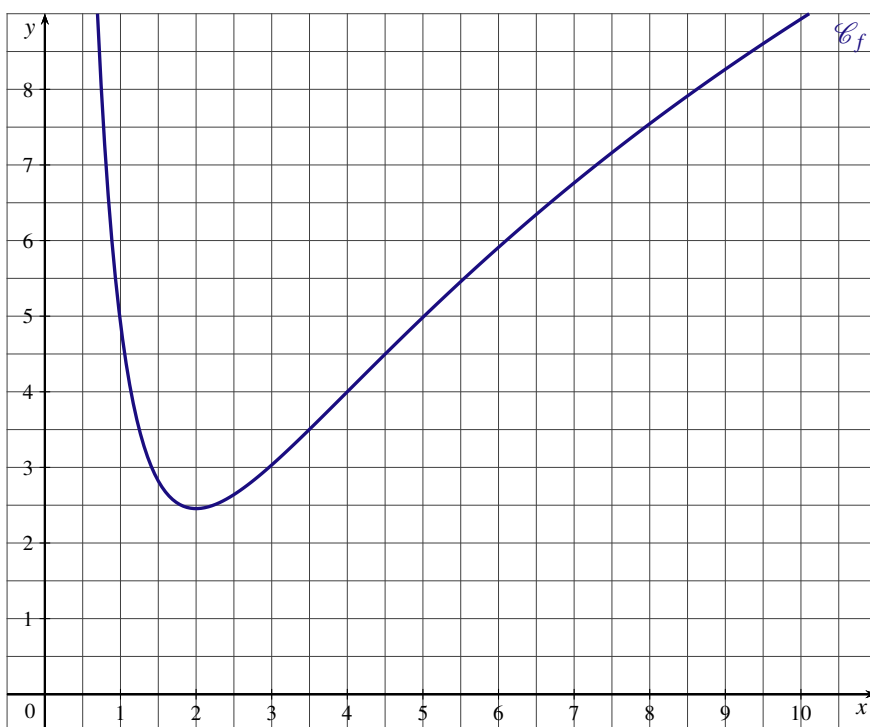
	$m = \frac{a+b}{2}$	$f(m)$ à 10^{-3} près	a	b	$b - a$
Initialisation			7	7,5	0,5
1 ^{re} boucle « Tant que »	0,725				
2 ^e boucle « Tant que »					
⋮					
Sortie					

d) En déduire jusqu'à quel nombre de pièces fabriquées l'entreprise réalise un bénéfice.

EXERCICE 15

Soit f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = 8\ln(x) + \frac{16}{x} - 16\ln(2)$.

Sa courbe représentative, notée $\mathcal{C}_f$, est tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthonormé.



PARTIE A

1. Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a $f'(x) = \frac{8(x-2)}{x^2}$ où f' désigne la dérivée de f .
2. Donner le tableau de variation de la fonction f .

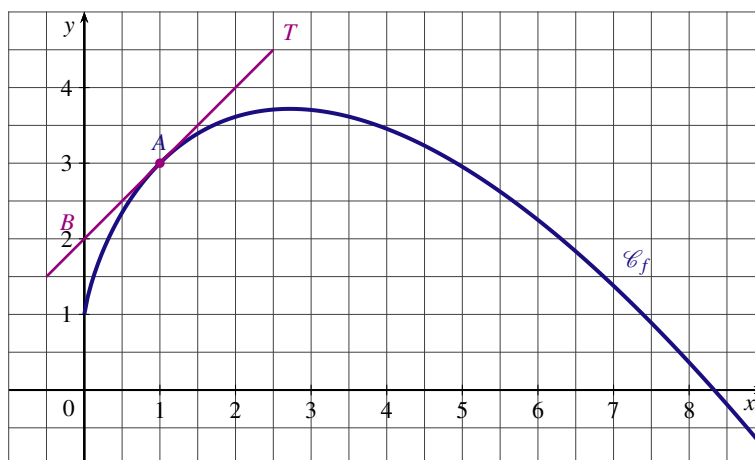
PARTIE B

1. La droite d'équation $y = x$ est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ en un point A d'abscisse a .
 - a) Justifier que a est solution de l'équation $\frac{8(a-2)}{a^2} = 1$.
 - b) Déterminer la valeur de a .
2. Étudier la convexité de la fonction f .
3. Dédire des deux questions précédentes, l'ensemble solution de l'inéquation $f(x) \leq x$

EXERCICE 16

On considère la fonction f définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = 2x - x \ln(x) + 1$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

La fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$, on note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

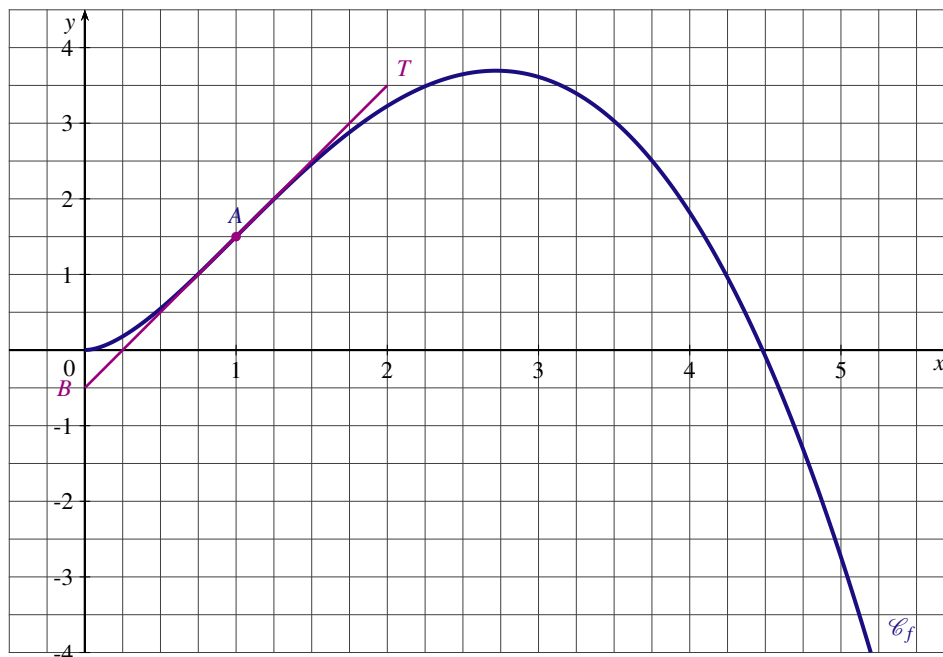


1. La tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A(1; 3)$ coupe l'axe des ordonnées au point $B(0; 2)$. Déterminer $f'(1)$.
2.
 - a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = 1 - \ln(x)$.
 - b) Résoudre dans l'intervalle $]0; +\infty[$, l'inéquation $1 - \ln(x) \leq 0$.
 - c) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
3. Étudier la convexité de la fonction f .

EXERCICE 17

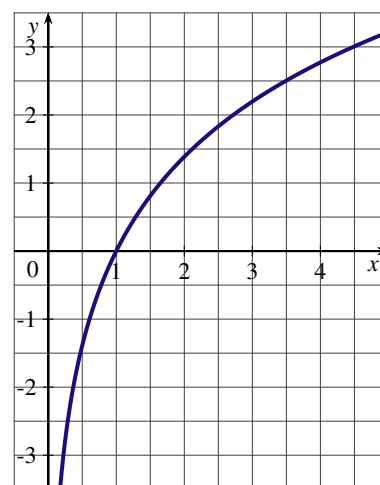
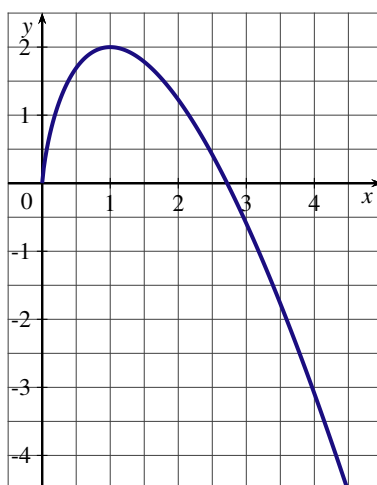
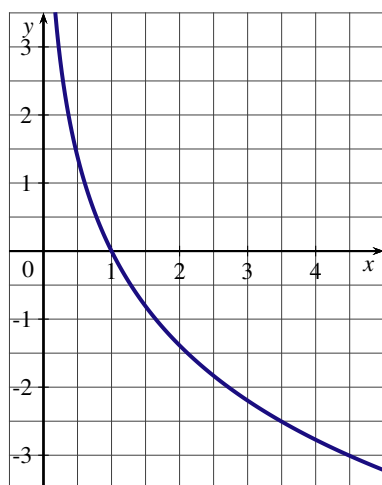
PARTIE A

La courbe $\mathcal{C}_f$, tracée ci-dessous dans un repère orthogonal est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$.



La tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$ coupe l'axe des ordonnées au point $B\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

- On note f' la dérivée de la fonction f , déterminer $f'(1)$.
- Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
- Une seule des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la dérivée seconde f'' : laquelle ?



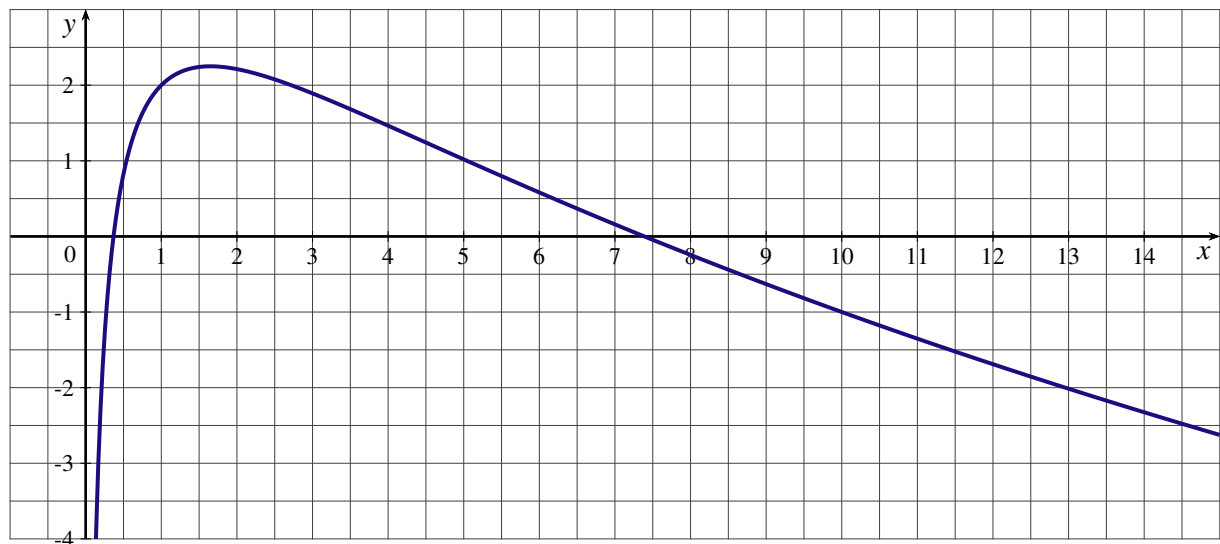
PARTIE B

La fonction f de la partie A est définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \times \left(\frac{3}{2} - \ln(x)\right)$.

- Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
- Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = 2x \times (1 - \ln(x))$.
 - Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
- On note f'' la dérivée seconde de f sur $]0; +\infty[$. Calculer $f''(x)$ puis, étudier la convexité de la fonction f .

EXERCICE 18

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ telle que pour tout réel x de cet intervalle $f(x) = (1 + \ln x)(2 - \ln x)$ et dont la courbe représentative C_f est donnée ci-dessous.



1. a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$. Les valeurs exactes sont demandées.
b) Étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
2. a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \frac{1 - 2\ln x}{x}$ pour tout réel x de l'intervalle $]0; +\infty[$.
b) Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x .
c) En déduire les variations de f . On précisera la valeur exacte du maximum de f et la valeur exacte de x pour laquelle il est atteint.
3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1 et la tracer sur le graphique.
4. a) Donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(1 + X)(2 - X) = 2$.
c) En déduire les solutions de l'équation $f(x) = 2$.

EXERCICE 19

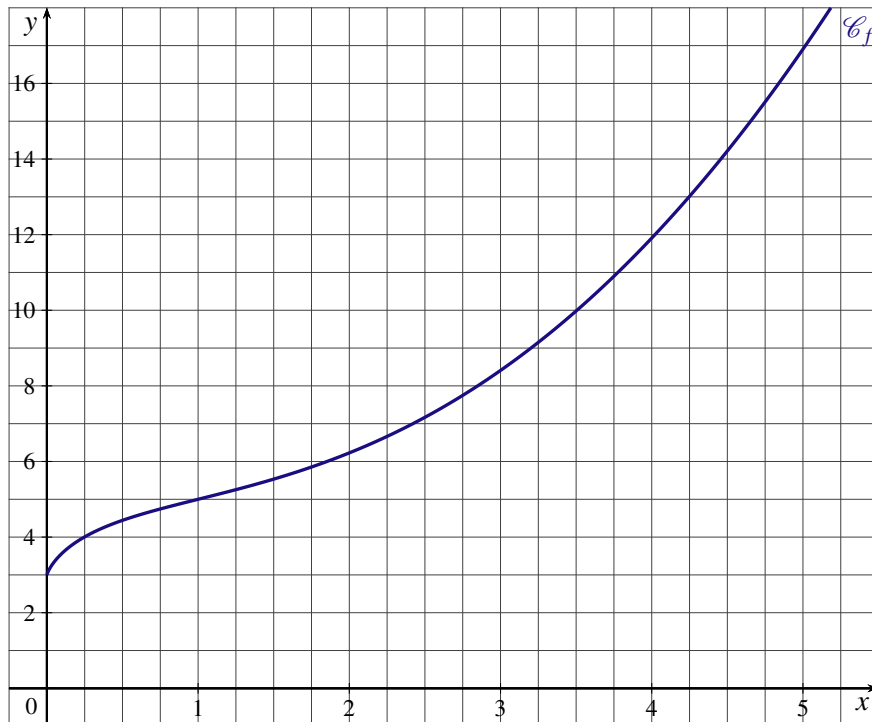
Soit f la fonction définie pour tout réel x strictement positif par $f(x) = x(x - 2\ln x + 1) + 3$

PARTIE A

1. Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de la fonction f .
2. Étudier les variations de la fonction f' .
3. En déduire que la fonction f est monotone.

PARTIE B

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



1. Montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet sur $]0; +\infty[$ une seule tangente passant par l'origine du repère.
Tracer cette tangente dans le repère précédent.
2. a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
b) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite T .

PARTIE C

Sur l'intervalle $]0; 5]$, le coût de production, en milliers d'euro, pour x milliers d'articles fabriqués chaque jour par une usine, est modélisé par $f(x)$.

On note $C_M(x) = \frac{f(x)}{x}$ le coût moyen de production avec $x \in]0; 5]$.

Quel doit être le prix de vente minimal d'un article pour assurer la rentabilité de cette production ?

Chapitre 6

CALCUL INTÉGRAL

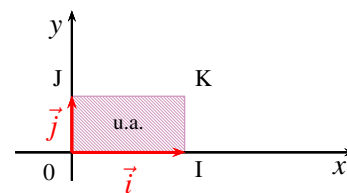
I	INTÉGRALE ET AIRE	84
1	Unité d'aire	84
2	Intégrale d'une fonction continue et positive	84
3	Intégrale d'une fonction continue et négative	86
4	Lien entre intégrale et dérivée	86
II	PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE	87
1	Définition	87
2	Ensemble des primitives d'une fonction	87
3	Primitive vérifiant une condition	88
III	CALCUL DE PRIMITIVES	88
1	Primitives des fonctions usuelles	88
2	Linéarité	88
3	Primitives des formes usuelles	89
IV	INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE	89
1	Définition	89
2	Premières propriétés	90
V	PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE	90
1	Positivité	90
2	Linéarité	91
3	Relation de Chasles	91
4	Ordre	92
VI	INTÉGRALE ET MOYENNE	93
1	Inégalités de la moyenne	93
2	Valeur moyenne	93
	EXERCICES	95

I INTÉGRALE ET AIRE

1 UNITÉ D'AIRE

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal du plan.

L'unité d'aire, notée u.a., est l'aire du rectangle unitaire OIJK avec I(0;1), J(0;1) et K(1;1).



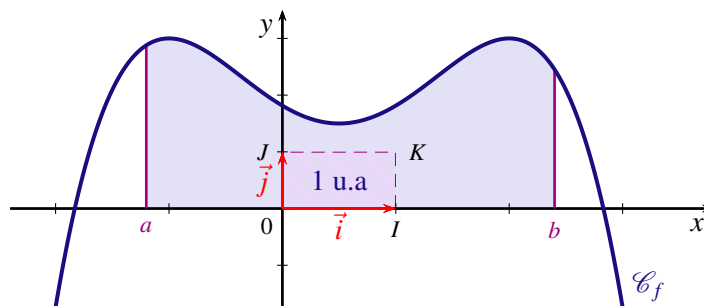
2 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET POSITIVE

DÉFINITION

Soit f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

L'intégrale de f entre a et b est l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$

Ce nombre est noté : $\int_a^b f(x)dx$



REMARQUES

— $\int_a^b f(x)dx$ se lit « intégrale de a à b de $f(x)dx$ » ou encore « somme de a à b de $f(x)dx$ ».

— Les réels a et b sont appelés les bornes de l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$.

— La variable x est dite « muette », elle n'intervient pas dans le résultat. C'est à dire qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre variable distincte des lettres a et b : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du$

— $\int_a^a f(x)dx = 0$, car le domaine $\mathcal{D}_f$ est alors réduit à un segment.

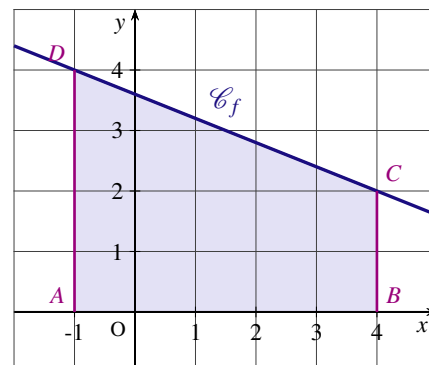
EXEMPLES

1. Calculons $\int_{-1}^4 (-0,4x + 3,6) dx$.

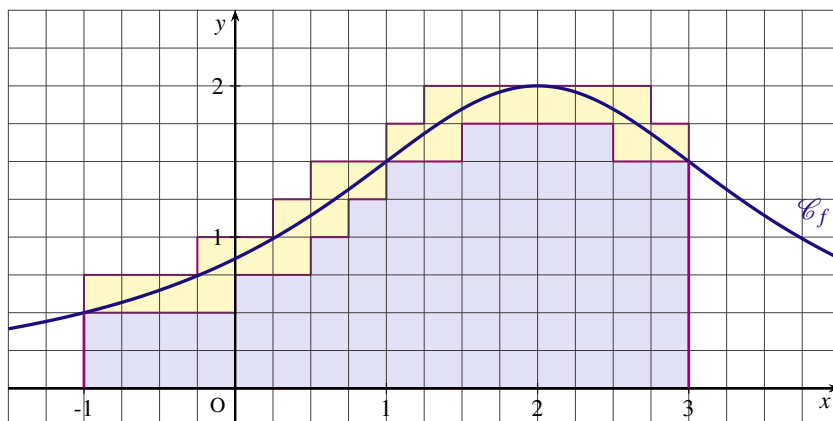
La fonction affine f définie pour tout réel x par $f(x) = -0,4x + 3,6$ est continue et positive sur l'intervalle $[-1; 4]$

L'intégrale $\int_{-1}^4 (-0,4x + 3,6) dx$ est égale à l'aire du trapèze ABCD.

$$\begin{aligned} \int_{-1}^4 (-0,4x + 3,6) dx &= \frac{(AD + BC) \times AB}{2} \\ &= \frac{(4 + 2) \times 5}{2} \\ &= 15 \end{aligned}$$



2. Soit f la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{6}{x^2 - 4x + 7}$ dont la courbe $\mathcal{C}_f$ est représentée ci-dessous. Déterminer un encadrement de l'intégrale $\int_{-1}^3 f(x)dx$.

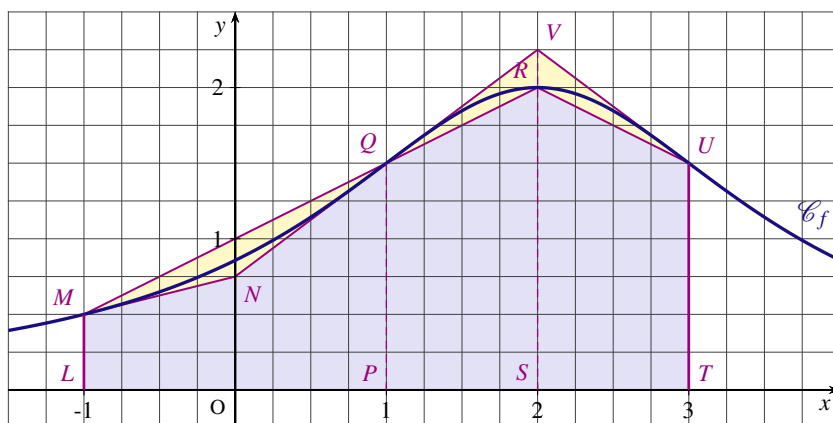


Sur l'intervalle $[-1; 3]$, la fonction f est continue et positive. L'intégrale $\int_{-1}^3 f(x)dx$ est égale à l'aire, en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 3$.

On peut déterminer un encadrement de l'intégrale $\int_{-1}^3 f(x)dx$ à l'aide du quadrillage. D'où l'encadrement

$$\frac{75}{16} \leq \int_{-1}^3 f(x)dx \leq 6$$

Un encadrement plus précis est obtenu à partir de trapèzes. Les droites (MN) , (NV) et (VU) étant les tangentes respectives à la courbe $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses -1 , 1 et 3 .



L'aire du domaine $\mathcal{D}_f$ est comprise entre la somme des aires des trapèzes $LMNO$, $NOPQ$, $PQRS$ et $RSTU$ et, la somme des aires des trapèzes $LMPQ$, $PQVS$ et $VSTU$. Soit

$$0,625 + 1,25 + 1,75 + 1,75 \leq \int_{-1}^3 f(x)dx \leq 2 + 1,875 + 1,875 \iff 5,375 \leq \int_{-1}^3 f(x)dx \leq 5,75$$

Remarque :

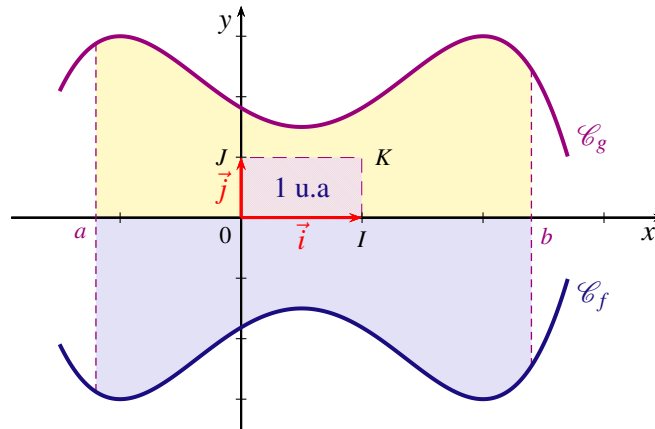
— À l'aide de la calculatrice, on trouve $\int_{-1}^3 \left(\frac{6}{x^2 - 4x + 7} \right) dx \approx 5,44$.

— À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient $\int_{-1}^3 \left(\frac{6}{x^2 - 4x + 7} \right) dx = \pi\sqrt{3}$.

3 INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ET NÉGATIVE

Si f est une fonction continue et négative sur un intervalle $[a; b]$ alors, la fonction g définie sur l'intervalle $[a; b]$ par $g = -f$ est une fonction continue et positive sur cet intervalle.

Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses, l'aire du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du domaine $\mathcal{D}_g$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_g$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



DÉFINITION

Soit f une fonction définie, continue et négative sur un intervalle $[a; b]$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

L'intégrale de la fonction f entre a et b est égale à l'opposé de l'aire $\mathcal{A}$, exprimée en unités d'aire, du domaine $\mathcal{D}_f$ compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$:

$$\int_a^b f(x)dx = -\mathcal{A}$$

4 LIEN ENTRE INTÉGRALE ET DÉRIVÉE

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. On peut définir une nouvelle fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a; b]$, associe l'intégrale de f entre a et x : $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

THÉORÈME (admis)

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

La fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f .

EXEMPLE

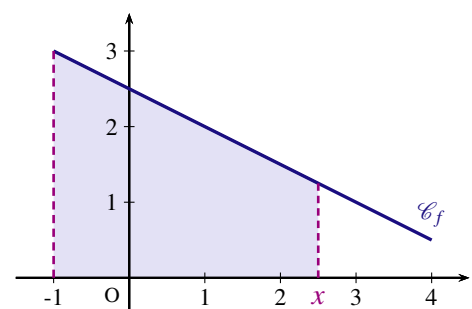
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-1; 4]$ par $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Si x est un réel de l'intervalle $[-1; 4]$, la fonction F définie par

$F(x) = \int_{-1}^x f(t)dt$ est égale à l'aire du trapèze colorié.

On a donc $F(x) = \frac{(3 + (-0,5x + 2,5)) \times (x + 1)}{2} = -\frac{x^2}{4} + \frac{5x}{2} + \frac{11}{4}$

La fonction F est dérivable sur $[-1; 4]$ et $F'(x) = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} = f(x)$.



II PRIMITIVES D'UNE FONCTION CONTINUE

1 DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I et telle que pour tout réel x de I , $F'(x) = f(x)$.

EXEMPLE

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5 - 3x$

Les fonctions F et G définies sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x$ et $G(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x - \sqrt{2}$ sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

De façon générale, toute fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 5x + c$, où c est un réel, est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2 ENSEMBLE DES PRIMITIVES D'UNE FONCTION

PROPRIÉTÉ (admise)

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

THÉORÈME

Si F est une primitive de f sur un intervalle I , alors les primitives de f sur I sont les fonctions G définies pour tout réel x de I par $G(x) = F(x) + k$ où k est un réel.

* DÉMONSTRATION

— Soient F une primitive de la fonction f sur I et k est un réel.

Si pour tout réel x de I , G est la fonction définie par $G(x) = F(x) + k$, alors $G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$ donc G est aussi une primitive de f sur I .

— Soient G et F deux primitives de f sur I .

On considère la fonction H définie sur I par $H(x) = G(x) - F(x)$, alors H est dérivable sur I et

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

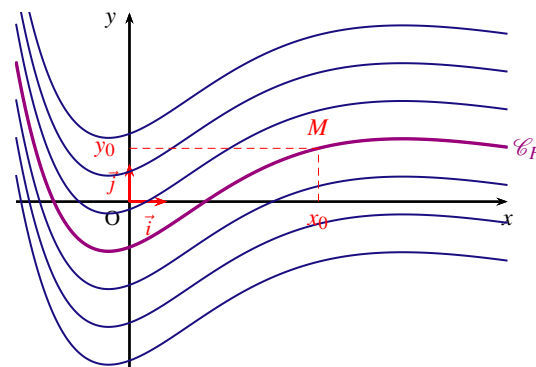
La dérivée H' est la fonction nulle sur I ce qui signifie que H est une fonction constante sur I .

Ainsi, pour tout réel x de I , $H(x) = k$ où C est un réel. Soit $G(x) - F(x) = C$ donc $G(x) = F(x) + k$.

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Si on connaît la courbe $\mathcal{C}$ représentative d'une primitive de f sur I , alors les courbes des primitives de f sur I se déduisent de $\mathcal{C}$ par une translation de vecteur $k\vec{j}$ où k est un réel.

Un point $M(x_0; y_0)$ étant donné, il n'existe qu'une seule courbe $\mathcal{C}_F$ de la famille passant par ce point.



3 PRIMITIVE VÉRIFIANT UNE CONDITION

Soit f une fonction admettant des primitives sur un intervalle I . Soit x_0 un réel de l'intervalle I et y_0 un réel quelconque.

Il existe une *unique* primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

* DÉMONSTRATION

Si G est une primitive de f sur I , alors toute primitive F de f sur I est définie par $F(x) = G(x) + k$ avec k réel. La condition $F(x_0) = y_0$ s'écrit $G(x_0) + k = y_0$ d'où $k = y_0 - G(x_0)$.

Il existe donc une seule primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$, définie par $F(x) = G(x) + y_0 - G(x_0)$.

III CALCUL DE PRIMITIVES

1 PRIMITIVES DES FONCTIONS USUELLES

f est définie sur I par ...	Une primitive F est donnée par ...	Validité
$f(x) = a$ (a est un réel)	$F(x) = ax$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$ (n est un entier naturel)	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	sur $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ (n entier, $n > 1$)	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	sur $] -\infty; 0[$ ou sur $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$	sur $]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	sur $]0; +\infty[$

2 LINÉARITÉ

- Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .
- Si F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I et α un réel, alors αF est une primitive de αf sur I .

* DÉMONSTRATION

Si F et G sont des primitives respectives des fonctions f et g sur I , alors $F + G$ et αF sont dérivables sur I .

— $(F + G)' = F' + G' = f + g$ donc $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .

— $(\alpha F)' = \alpha F' = \alpha f$ donc αF est une primitive de αf sur I .

EXEMPLE

Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - \frac{3}{x}$.

La fonction u définie par $u(x) = x^2$ admet comme primitive la fonction U définie par $U(x) = \frac{x^3}{3}$.

Sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet pour primitive la fonction $x \mapsto \ln x$. Donc sur l'intervalle $]0; +\infty[$ la fonction v définie par $v(x) = -\frac{3}{x}$ admet comme primitive la fonction V définie par $V(x) = -3 \ln x$.

Donc la fonction $f = u + v$ admet comme primitive la fonction $F = U + V$ définie par $F(x) = \frac{x^3}{3} - 3 \ln x$.

3 PRIMITIVES DES FORMES USUELLES

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et u' sa dérivée.

Fonction f	Une primitive F est donnée par...
$f = u'u$	$F = \frac{1}{2}u^2$
$f = u'u^n$ n entier, $n > 0$	$F = \frac{u^{n+1}}{n+1}$
$f = u'e^u$	$F = e^u$
$f = \frac{u'}{u^2}$ u ne s'annule pas sur I	$F = -\frac{1}{u}$
$f = \frac{u'}{u^n}$ (n entier, $n \geq 2$) u ne s'annule pas sur I	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$

EXEMPLE

Déterminer la primitive F de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{1-x^2}$ telle que $F(1) = 0$.

Soit u la fonction définie pour tout réel x par $u(x) = 1 - x^2$ alors $u'(x) = -2x$.

On a : $f(x) = -\frac{1}{2} \times (-2x) \times e^{1-x^2}$ soit $f = -\frac{1}{2} \times u'e^u$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie pour tout réel x , par $F(x) = -\frac{1}{2}e^{1-x^2} + c$ où c est un réel à déterminer.

Or $F(1) = 0 \iff -\frac{1}{2} + c = 0 \iff c = \frac{1}{2}$.

Ainsi, la primitive de la fonction f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = -\frac{1}{2}e^{1-x^2} + \frac{1}{2}$.

IV INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

1 DÉFINITION

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ et F une primitive de la fonction f sur $[a; b]$.
L'intégrale de f entre a à b est le nombre réel égal à $F(b) - F(a)$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

REMARQUES

— La différence $F(b) - F(a)$ se note $\left[F(x)\right]_a^b$; ainsi $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$.

— Le choix de la primitive F n'influe pas sur la valeur de l'intégrale.

En effet, si G est une autre primitive de f sur I , il existe un réel k tel que $G(x) = F(x) + k$ d'où

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a)$$

— Si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ alors l'intégrale $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ est l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

EXEMPLE

$$\begin{aligned}\int_1^e \left(x - \frac{1}{x} + \frac{e}{x^2}\right) dx &= \left[\frac{x^2}{2} - \ln(x) - \frac{e}{x}\right]_1^e \\ &= \left(\frac{e^2}{2} - \ln(e) - \frac{e}{e}\right) - \left(\frac{1^2}{2} - \ln(1) - \frac{e}{1}\right) \\ &= \frac{e^2}{2} + e - \frac{5}{2}\end{aligned}$$

2 PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout réel a appartenant à I .

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Preuve :

Soit F une primitive de f sur I .

$$\int_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0$$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, a et b deux réels appartenant à I .

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Preuve :

Soit F une primitive de f sur I .

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \text{et} \quad \int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$$

V PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

1 POSITIVITÉ

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels appartenant à I .

Si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur l'intervalle $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

* DÉMONSTRATION

Soit F une primitive de f sur I . Pour tout réel x de l'intervalle I , $F'(x) = f(x)$.

Or $f \geq 0$ sur l'intervalle $[a; b]$ donc F est croissante sur $[a; b]$. Par conséquent, si $a \leq b$, alors $F(a) \leq F(b)$.

On en déduit que $F(b) - F(a) \geq 0$ et $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

Attention la réciproque est fausse :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x + 1$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^3 (-x^2 + 3x + 1) \, dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 + x \right]_{-2}^3 \\ &= \left(-9 + \frac{27}{2} + 3 \right) - \left(\frac{8}{3} + 6 - 2 \right) = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

Ainsi $\int_{-2}^3 f(x) \, dx \geq 0$ mais $f(-1) = -3$.

On démontre de manière analogue la propriété suivante :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels appartenant à I .

Si $a \leq b$ et $f \leq 0$ sur l'intervalle $[a; b]$, alors $\int_a^b f(x) \, dx \leq 0$.

2 LINÉARITÉ

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a et b appartenant à I , et pour tout réel α

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx \quad \text{et} \quad \int_a^b \alpha f(x) \, dx = \alpha \int_a^b f(x) \, dx$$

* DÉMONSTRATION

1. Si F et G sont deux primitives respectives des fonctions f et g sur I , alors $F + G$ est une primitive sur I de la fonction $f + g$.

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx &= (F(b) + G(b)) - (F(a) + G(a)) \\ &= (F(b) - F(a)) + (G(b) - G(a)) \\ &= \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx\end{aligned}$$

2. Soit F une primitive de f sur I et α un réel.

$$\begin{aligned}\int_a^b \alpha f(x) \, dx &= \alpha F(b) - \alpha F(a) \\ &= \alpha (F(b) - F(a)) \\ &= \alpha \int_a^b f(x) \, dx\end{aligned}$$

3 RELATION DE CHASLES

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tous réels a , b et c appartenant à I

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

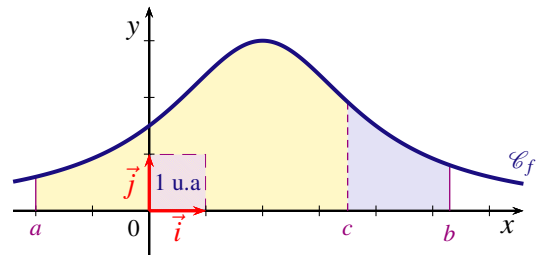
* DÉMONSTRATION

Soit F une primitive de f sur I . Pour tous réels a, b et c appartenant à I

$$\begin{aligned}\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx &= (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)dx\end{aligned}$$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$.
L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est égale à la somme des aires du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = c$ et du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = c$ et $x = b$.



4 ORDRE

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , a et b deux réels appartenant à I tels que $a \leq b$.

Si pour tout réel x appartenant à $[a; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

* DÉMONSTRATION

Si pour tout réel x appartenant à $[a; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $f(x) - g(x) \leq 0$. Comme f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b]$, la fonction $f - g$ est continue sur $[a; b]$.

Par conséquent, si $a \leq b$ et $f - g \leq 0$ alors

$$\int_a^b (f - g)(x)dx \leq 0 \iff \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \leq 0$$

Attention la réciproque est fausse :

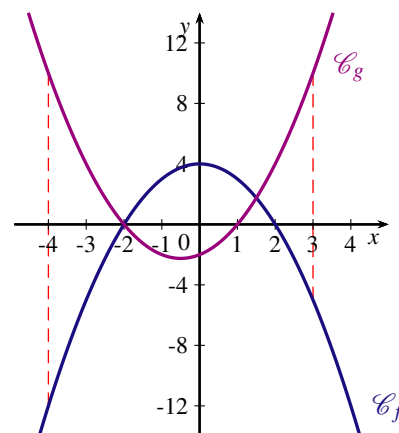
Considérons les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4 - x^2$ et $g(x) = x^2 + x - 2$.

$$\begin{aligned}\int_{-4}^3 (4 - x^2) dx &= \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-4}^3 \\ &= \left(12 - \frac{27}{3} \right) - \left(-16 + \frac{64}{3} \right) \\ &= -\frac{7}{3}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\int_{-4}^3 (x^2 + x - 2) dx &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-4}^3 \\ &= \left(\frac{27}{3} + \frac{9}{2} - 6 \right) - \left(-\frac{64}{3} + \frac{16}{2} + 8 \right) \\ &= \frac{77}{6}\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_{-4}^3 f(x)dx \leq \int_{-4}^3 g(x)dx$ mais nous ne pouvons pas conclure que sur l'intervalle $[-4;3]$, $f(x) \leq g(x)$ comme on peut le constater sur le graphique ci-contre.



VI INTÉGRALE ET MOYENNE

1 INÉGALITÉS DE LA MOYENNE

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$). Soit m et M deux réels. Si pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors :

$$m \times (b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \times (b - a)$$

* DÉMONSTRATION

Les fonctions définies sur $[a; b]$ par $x \mapsto m$ et $x \mapsto M$ sont constantes donc continues.

Si pour tout réel x appartenant à $[a; b]$ ($a < b$), $m \leq f(x) \leq M$, alors d'après la propriété de l'intégration d'une inégalité :

$$\begin{aligned} \int_a^b m \, dx &\leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M \, dx \iff m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \int_a^b dx \\ &\iff m \times (b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \times (b - a) \end{aligned}$$

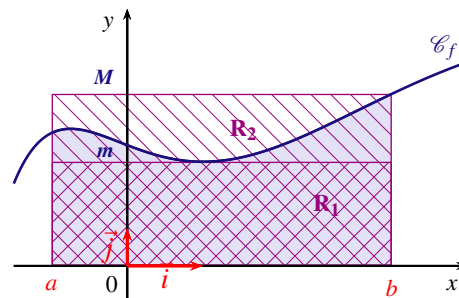
INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$

L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est comprise entre les aires des rectangles R_1 et R_2 :

R_1 de côtés m et $b - a$;

R_2 de côtés M et $b - a$.



2 VALEUR MOYENNE

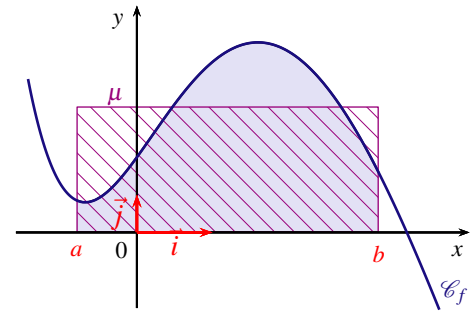
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a; b]$ de $\mathbb{R}$ ($a < b$).

On appelle valeur moyenne de f sur $[a; b]$ le réel $\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :

Dans le cas où f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$

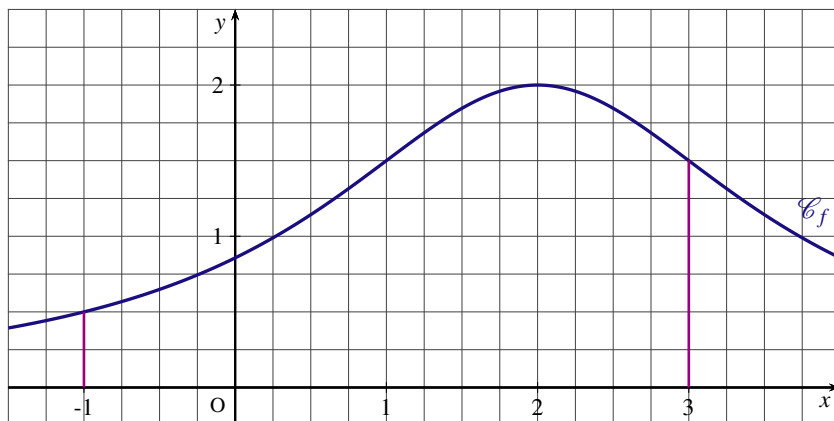
L'aire du domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à l'aire du rectangle de côtés μ et $b - a$.



EXERCICE 1

1. La courbe $\mathcal{C}_f$ est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer un encadrement de l'intégrale $\int_{-1}^3 f(x)dx$.



2. La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = \frac{6}{x^2 - 4x + 7}$.

À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement au centième près, de l'intégrale $\int_{-1}^3 f(x)dx$.

EXERCICE 2

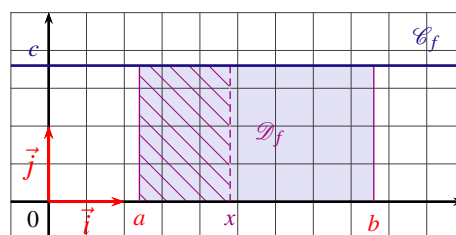
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm. a et b sont deux réels tels que $a < b$. Dans chaque cas, on considère une fonction f définie et positive sur l'intervalle $[a; b]$.

$\mathcal{C}_f$ désigne la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{D}_f$ le domaine compris entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

FONCTION CONSTANTE :

Soit c un réel positif. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = c$.

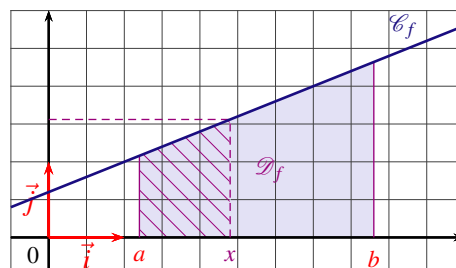
- Exprimer en fonction de a et de b l'aire en cm^2 du domaine $\mathcal{D}_f$.
- On considère la fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a; b]$, associe l'aire $\mathcal{A}_x$ du domaine hachuré.
 - Donner une expression de F en fonction de x .
 - Calculer $F'(x)$ où F' est la dérivée de la fonction F sur $[a; b]$
 - Calculer $F(b) - F(a)$. Que constate-t-on ?



FONCTION AFFINE :

f est une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ où m et p sont des réels fixés avec m non nul. f est supposée positive sur $[a; b]$.

- Exprimer en fonction de a et de b l'aire en cm^2 du domaine $\mathcal{D}_f$.
- On considère la fonction F qui à tout réel x de l'intervalle $[a; b]$, associe l'aire $\mathcal{A}_x$ du domaine hachuré.
 - Donner une expression de F en fonction de x .
 - Calculer $F'(x)$ où F' est la dérivée de la fonction F sur $[a; b]$
 - Calculer $F(b) - F(a)$. Que constate-t-on ?



EXERCICE 3

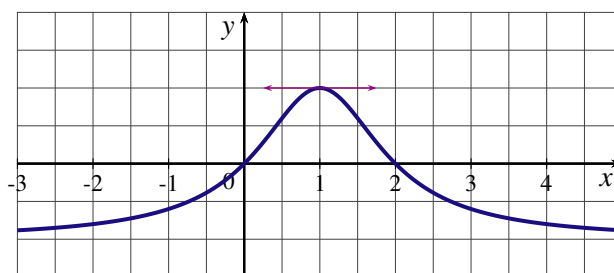
- Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 3x - 1$ et $g(x) = -2x + 3$.
Vérifier que g est la dérivée de f . Trouver d'autres fonctions ayant g pour dérivée.
- Dans chacun des cas suivants, trouver une fonction F ayant pour dérivée la fonction f sur l'intervalle I .
 - $f(x) = 3x - 2$ ($I = \mathbb{R}$)
 - $f(x) = 2x^2 + x - 1$ ($I = \mathbb{R}$)
 - $f(x) = x^3$ ($I = \mathbb{R}$)
 - $f(x) = \frac{3}{x^2}$ ($I =]0; +\infty[$)
 - $f(x) = \frac{2}{x}$ ($I =]0; +\infty[$)
 - $f(x) = e^{0,5x}$ ($I = \mathbb{R}$)

EXERCICE 4

Soit F et G les fonctions définies sur $] -1; +\infty[$ par : $F(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ et $G(x) = x - 2 + \frac{1}{x + 1}$.
Montrer que F et G sont deux primitives sur $] -1; +\infty[$ d'une même fonction f que l'on précisera.

EXERCICE 5

Une primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction f est définie par $F(x) = \frac{2}{x^2 - 2x + 2}$. On a tracé ci-dessous, la courbe représentative d'une autre primitive G de f .



- Donner l'expression de $G(x)$.
- Déterminer $f(1)$.

EXERCICE 6

Dans chaque cas, trouver une primitive F de la fonction f .

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{2}$.
- f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x^3 - 1 - \frac{1}{x^2}$.
- f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2}{x}$.
- f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2}{x^2} - \frac{x}{2} + \frac{2}{3x}$.
- f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{-x}$.

EXERCICE 7

Dans chacun des cas suivants, calculer la primitive F de la fonction f qui vérifie la condition donnée.

- f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$ et $F(-2) = 0$.
- f est définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ et $F(1) = -1$.
- f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x - 1)^2$ et $F\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

4. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 - \frac{e^{2x}}{2}$ et $F(0) = -\frac{1}{2}$.
5. f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$ et $F(-1) = \frac{1}{4}$.

EXERCICE 8

Calculer la valeur exacte de chacune des intégrales suivantes :

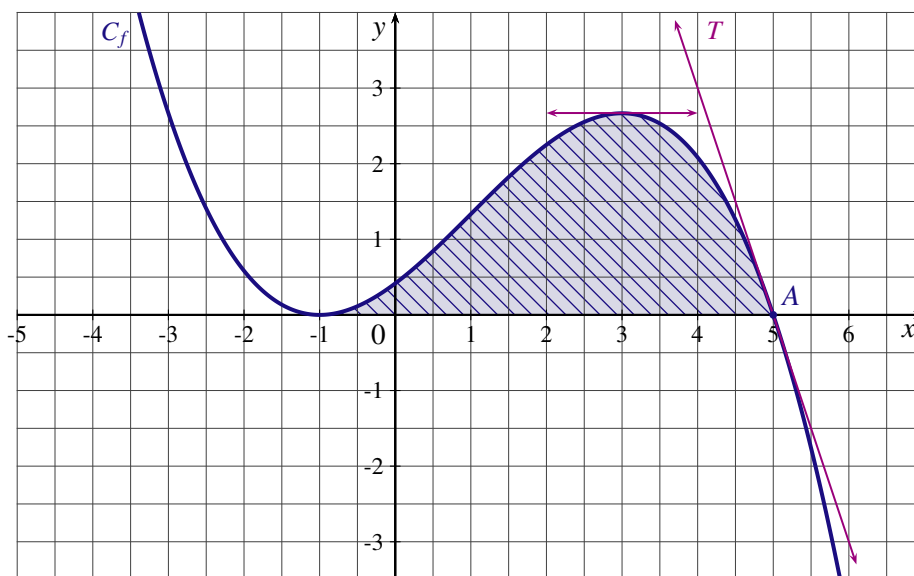
1. $A = \int_{-1}^2 (x^2 - 3x + 1) dx$
2. $B = \int_2^6 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} - 1 \right) dx$
3. $C = \int_{-2}^1 2e^{2x+1} dx$
4. $D = \int_0^{\ln 2} 2e^x \times (e^x + 1) dx$
5. $E = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln x}{x} dx$

EXERCICE 9

1. Calculer l'intégrale $\int_{-2}^2 e^x - e^{-x} dx$.
2. Peut-on en déduire que la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^x - e^{-x}$ est constante sur l'intervalle $[-2; 2]$?

EXERCICE 10

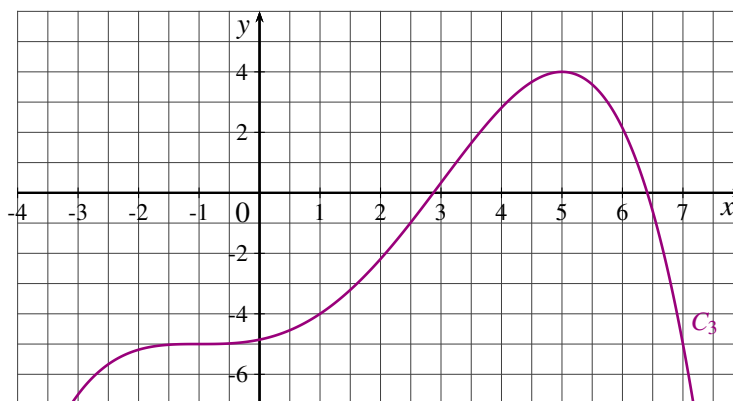
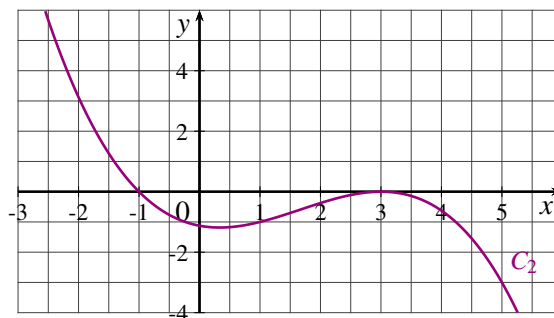
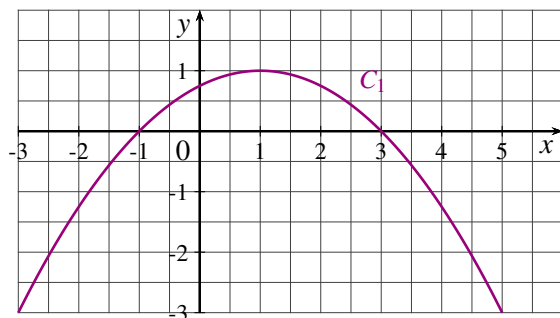
La courbe $\mathcal{C}_f$ tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
La tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A passe par le point de coordonnées $(4; 3)$.
On note f' la dérivée de la fonction f et F une primitive de la fonction f .



1. Déterminer $f'(3)$ et $f'(5)$.
2. Donner le tableau de variations de la fonction F .
3. Donner un encadrement de l'intégrale $\int_{-1}^5 f(x) dx$.

4. Une des trois courbes ci-dessous est la représentation graphique de la fonction f' et une autre celle de la fonction F .

a) Déterminer la courbe associée à la fonction f' et celle qui est associée à la fonction F .

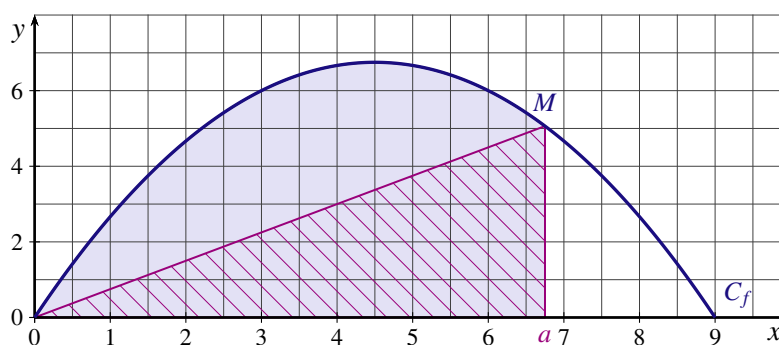


b) En déduire la valeur exacte de l'aire du domaine colorié.

c) La courbe représentative de la fonction F admet-elle des points d'inflexion ?

EXERCICE 11

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 9]$ par $f(x) = 3x - \frac{x^2}{3}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal.



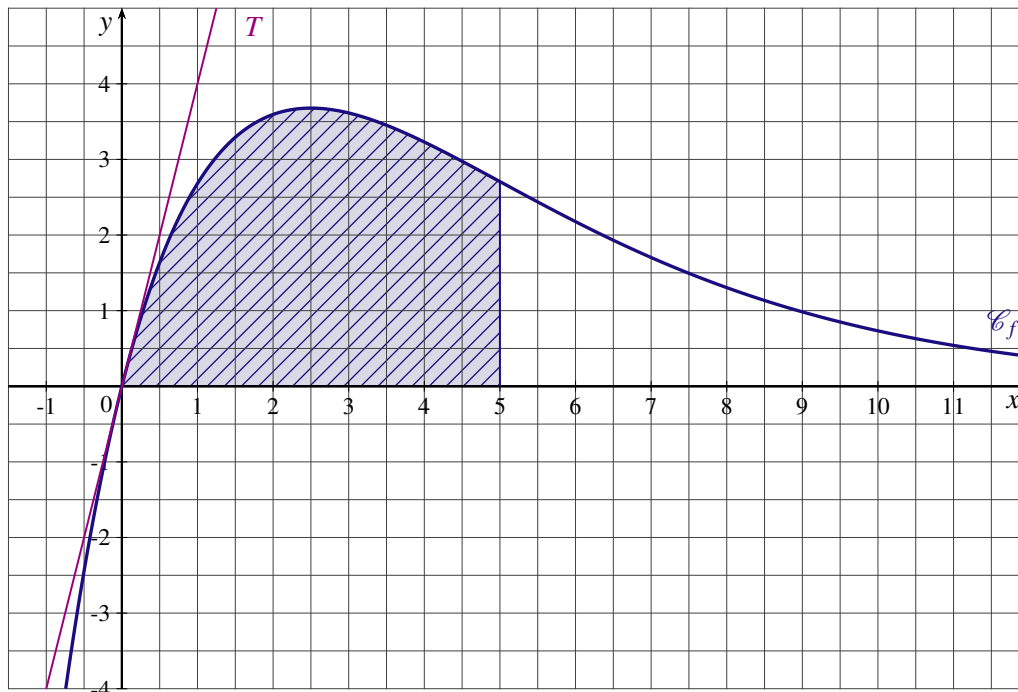
L'objet de cet exercice est de déterminer l'abscisse a du point M de la parabole $\mathcal{C}_f$ telle que l'aire du triangle hachuré soit égale à la moitié de l'aire du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.

1. Quelle est l'ordonnée du point M de la parabole $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a ? En déduire l'aire T en fonction de a du triangle hachuré.
2. Exprimer l'aire A en fonction de a du domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = a$.
3. Déterminer a pour que $A = 2T$.

EXERCICE 12

La courbe $\mathcal{C}_f$ tracée ci-dessous dans le plan muni d'un repère orthogonal est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

La droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.



PARTIE A - Lecture graphique

- On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f . Par lecture graphique, déterminer $f'(0)$.
- Soit F une primitive de f . Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

PROPOSITION A : Sur l'intervalle $[5; +\infty[$, la fonction F est croissante.

PROPOSITION B : $F(-1) \leq F(0)$.

PROPOSITION C : $12 \leq F(5) - F(0) \leq 18$.

PARTIE B - Calcul d'aire

La fonction f est définie pour tout réel x par $f(x) = 4xe^{-0,4x}$.

- On cherche une primitive F de la fonction f de la forme $F(x) = (ax + b)e^{-0,4x}$ avec a et b deux nombres réels.
 - Montrer que a et b sont solutions du système d'équations suivant :
$$\begin{cases} -0,4a &= 4 \\ a - 0,4b &= 0 \end{cases}$$
 - Calculer a et b et donner l'expression de $F(x)$.
- On note A l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine colorié sur le graphique. Déterminer la valeur exacte de A .

EXERCICE 13

Soit f une fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$. On sait que $f(2) = -4$ et que le signe de la fonction f est donné par le tableau suivant :

x	0	4	$+\infty$
signe de $f(x)$		-	0

PARTIE A

1. Soit F la primitive de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ telle que $F(4) = \frac{1}{2}$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction F .

- Donner le tableau de variations de la fonction F .
- On suppose que la courbe $\mathcal{C}$ passe par le point $A(2;3)$.
Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A .

PARTIE B

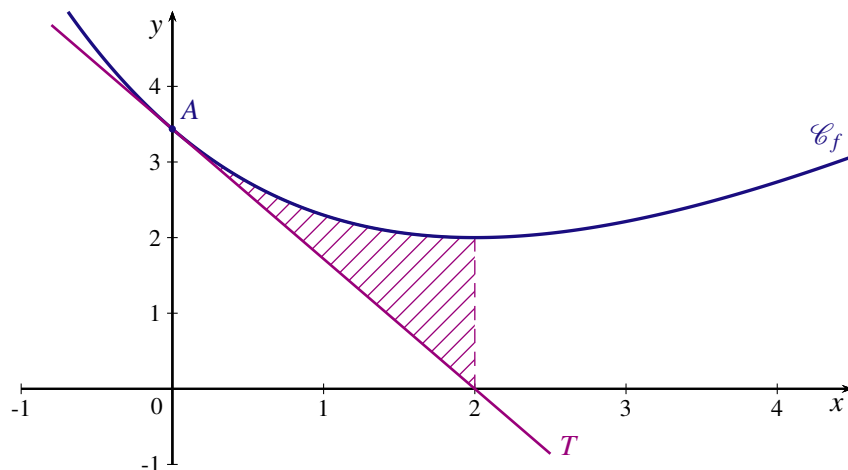
f est la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - \frac{12}{x^2} - \frac{16}{x^3}$

- Calculer la primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$ telle que $F(4) = \frac{1}{2}$.
 - Vérifier que la tangente à la courbe représentative de la fonction F au point d'abscisse 2 a pour équation $y = -4x + 11$.
- Étudier la convexité de la fonction F

EXERCICE 14

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^{1-0,5x} + x - 2$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan. (Unités graphiques : 2cm sur l'axe des abscisses et 1cm sur l'axe des ordonnées)



- Calculer $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f , puis étudier son signe.
 - En déduire le tableau de variation de la fonction f .
- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
- Étudier la convexité de la fonction f .
 - En déduire la position relative de la tangente T par rapport à la courbe $\mathcal{C}_f$.
- Déterminer la valeur exacte de l'aire, exprimée en unités d'aire, du domaine limité par $\mathcal{C}_f$, T l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.
Donner une valeur approchée arrondie au centième près de cette aire en cm^2 .

EXERCICE 15

(D'après sujet bac Polynésie septembre 2015)

Étude de la répartition des salaires dans deux entreprises

Un cabinet d'audit a été chargé d'étudier la répartition des salaires dans deux filiales d'une entreprise, appelées A et B. Pour l'étude, les salaires sont classés par ordre croissant.

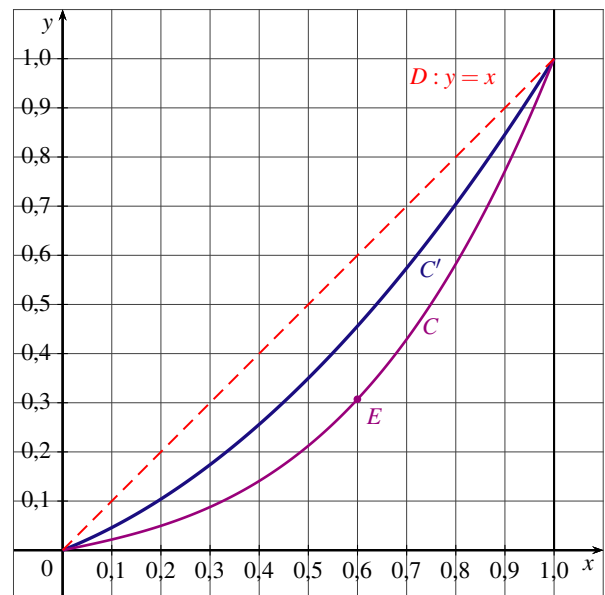
Le cabinet d'audit a modélisé la répartition de salaires par la fonction u pour la filiale A et par la fonction v pour la filiale B.

Les fonctions u et v sont définies sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$u(x) = 0,6x^2 + 0,4x \text{ et}$$

$$v(x) = 0,7x^3 + 0,1x^2 + 0,2x.$$

On a tracé ci-contre les courbes représentatives C et C' des fonctions u et v .



- Déterminer la courbe représentative de la fonction u en justifiant la réponse.
- Lorsque x représente un pourcentage de salariés, $u(x)$ et $v(x)$ représentent le pourcentage de la masse salariale que se partagent ces salariés dans leurs filiales respectives.
Exemple : pour la courbe C , le point $E(0,60; 0,3072)$ signifie que 60 % des salariés ayant les plus bas salaires se partagent 30,72 % de la masse salariale.
 - Calculer le pourcentage de la masse salariale que se répartissent les 50 % des salariés de la filiale A ayant les plus bas salaires.
 - Pour les 50 % des salariés ayant les plus bas salaires, laquelle des filiales, A ou B, distribue la plus grande part de la masse salariale ?
 - Quelle filiale paraît avoir une distribution des salaires la plus inégalitaire ?
- Pour mesurer ces inégalités de salaires, on définit le coefficient de Gini associé à une fonction f modélisant la répartition des salaires, rangés en ordre croissant, par la formule :

$$c_f = 2 \left(\frac{1}{2} - \int_0^1 f(x) dx \right).$$

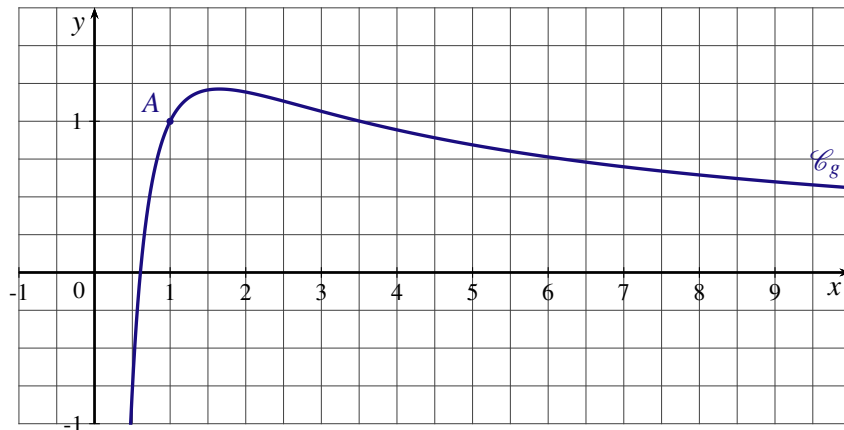
- Montrer que $c_u = 0,2$.
- En observant que $\frac{c_v}{2} = \int_0^1 x dx - \int_0^1 v(x) dx$, donner une interprétation graphique de $\frac{c_v}{2}$ en termes d'aires.
- En déduire que c_v est compris entre 0 et 1.
- Justifier l'inégalité $c_u \leq c_v$.

EXERCICE 16

PARTIE A - Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2\ln(x) + 1}{x}$.

On donne ci-dessous sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal.



- Calculer $f'(x)$.
 - Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f .
- Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 1.
- Montrer que, sur l'intervalle $]0; +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ admet un unique point d'inflexion dont on précisera l'abscisse.
- Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0; +\infty[$.
On pourra remarquer que $f(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x) + \frac{1}{x}$.
 - Soit $I = \frac{1}{4} \int_1^5 f(x) dx$. Déterminer la valeur exacte de I , puis en donner une valeur approchée au centième près.

PARTIE B - Application économique

Dans cette partie, on pourra utiliser certains résultats de la partie B.

Une entreprise de sous-traitance fabrique des pièces pour l'industrie automobile. Sa production pour ce type de pièces varie entre 1000 et 5000 pièces par semaine, selon la demande.

On suppose que toutes les pièces produites sont vendues.

Le bénéfice unitaire, en fonction du nombre de pièces produites par semaine, peut être modélisé par la fonction f définie dans la partie B, avec x exprimé en milliers de pièces et $f(x)$ exprimé en euros.

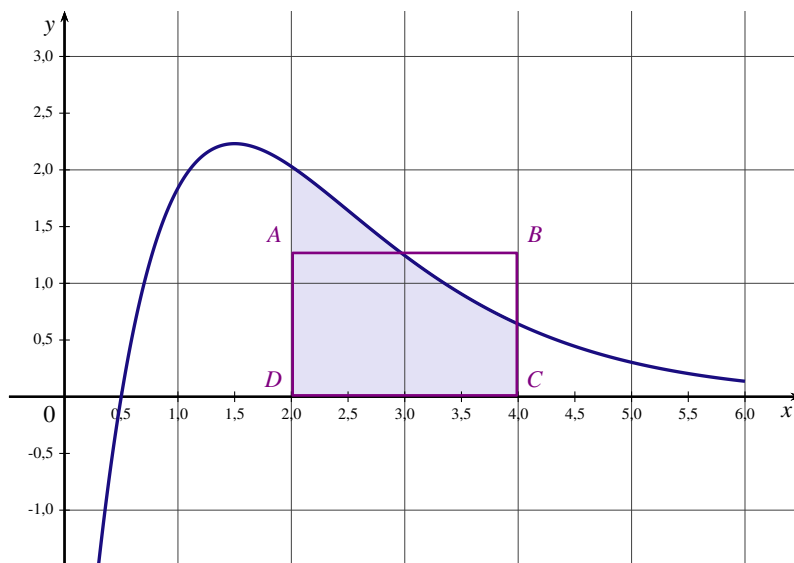
- Déterminer, au centime près, la valeur moyenne du bénéfice unitaire pour une production hebdomadaire comprise entre 1000 et 5000 pièces.
- Dans cette question, la réponse sera soigneusement justifiée. Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Pour quelle(s) production(s), arrondie(s) à l'unité près, obtient-on un bénéfice unitaire égal à 1,05 € ?

EXERCICE 17

(D'après sujet bac Antilles Guyane 2016)

La courbe ci-dessous est la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0;6]$. $ABCD$ est un rectangle, le point D a pour coordonnées $(2;0)$ et le point C a pour coordonnées $(4;0)$.



PARTIE A

Dans cette partie A, les réponses seront données à partir d'une lecture graphique.

1. Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) > 0$.
2. Avec la précision permise par le graphique, donner une valeur approchée du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0;6]$.
3. Quel semble être le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[2;6]$? Justifier.
4. Pour quelle(s) raison(s) peut-on penser que la courbe admet un point d'inflexion ?
5. Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de $\int_2^4 f(x)dx$.

PARTIE B

La fonction f est la fonction définie sur l'intervalle $[0;6]$ par $f(x) = (10x - 5)e^{-x}$.

Un logiciel de calcul formel a donné les résultats suivants (on ne demande pas de les justifier) :

$$f'(x) = (-10x + 15)e^{-x} \quad \text{et} \quad f''(x) = (10x - 25)e^{-x}.$$

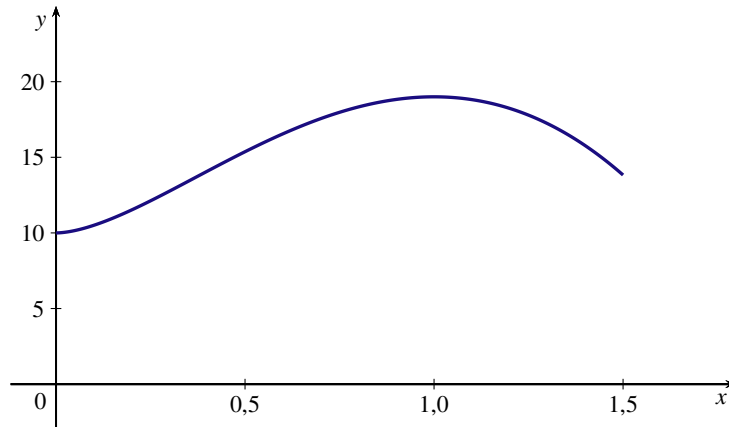
1. Dresser le tableau de variation de f en précisant la valeur de l'extremum et les valeurs aux bornes de l'ensemble de définition.
2. Étudier la convexité de f sur l'intervalle $[0;6]$.
3. Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0;6]$ par $F(x) = (-10x - 5)e^{-x}$ est une primitive de f sur l'intervalle $[0;6]$.
4. En déduire la valeur exacte puis une valeur approchée au centième de $\int_2^4 f(x)dx$.
5. On souhaiterait que l'aire du rectangle $ABCD$ soit égale à l'aire du domaine grisé sur la figure.
Déterminer, à 0,01 près, la hauteur AD de ce rectangle.

EXERCICE 18

(D'après sujet bac Amérique du Nord 2016)

PARTIE A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 1,5]$ par $f(x) = 9x^2(1 - 2\ln x) + 10$.
La courbe représentative de f est donnée ci-dessous :



1. a) Montrer que $f'(x) = -36x \ln x$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0; 1,5]$.
b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0; 1,5]$.
c) Dédire de la question précédente les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0; 1,5]$.
2. On admet que $f''(x) = -36 \ln x - 36$ où f'' désigne la dérivée seconde de la fonction f sur l'intervalle $]0; 1,5]$.
Montrer que la courbe représentative de la fonction f admet un point d'inflexion dont l'abscisse est e^{-1} .
3. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]0; 1,5]$ par $F(x) = 10x + 5x^3 - 6x^3 \ln x$.
a) Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $]0; 1,5]$.
b) Calculer $\int_1^{1,5} f(x) dx$.
On donnera le résultat arrondi au centième.

PARTIE B : Application économique

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

Une société est cotée en bourse depuis un an et demi.

Le prix de l'action depuis un an et demi est modélisé par la fonction f définie dans la partie A, où x représente le nombre d'années écoulées depuis l'introduction en bourse et $f(x)$ représente le prix de l'action, exprimé en euros.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

PROPOSITION 1 :

« Sur la période des six derniers mois, l'action a perdu plus d'un quart de sa valeur. »

PROPOSITION 2 :

« Sur la période des six derniers mois, la valeur moyenne de l'action a été inférieure à 17 €. »