Exercice 1

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(1 - x^2\right)$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.
   a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, c'est-à-dire l'ensemble des réels x tels que $f(x)$ existe.
   b. Quelle est l'ordonnée du point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse $\dfrac{1}{2}$?
   c. Déterminer $f'(x)$ pour tout x appartenant au domaine de définition de f.
2. On considère à présent la fonction g définie sur $]1~;~+\infty[$ par $g(x) = \ln(\ln(x))$.
   a. Résoudre sur $]1~;~+\infty[$ l'inéquation $g(x) > 0$.
   b. Déterminer $g'(x)$ pour tout $x \in]1~;~+\infty[$.
   c. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction g au point d'abscisse e.

Exercice 2

On rappelle que :

- Le taux d'emploi d'une classe d'individus est calculé en rapportant le nombre d'individus de la classe ayant un emploi au nombre total d'individus dans la classe.
- Un individu âgé de 55 ans à 64 ans est appelé un « senior ».
- UE désigne l'Union européenne.

Selon un rapport de l'INSEE datant de 2009 :
« Le taux d'emploi des personnes âgées de 55 à 64 ans est considéré comme un levier privilégié pour limiter l'exclusion de ces personnes du marché du travail et maîtriser les dépenses de retraites.
En 2008, il est de 45,6 % dans l'UE, mais seulement de 38,3 % en France alors que l'objectif de l'UE comme de la France est d'atteindre 50 % en 2010. »

Le but de l'exercice est de vérifier si la France a atteint l'objectif visé par l'UE.
Dans tout l'exercice, le taux d'emploi sera exprimé en pourcentage. Les valeurs approchées seront arrondies au dixième.

Partie A

On admet qu'à l'année $2000 + n$, ce taux d'emploi est donné par l'expression $29,9 \times 1,037^n$ où n désigne un entier naturel. Selon ce modèle, déterminer :

1. Le taux d'emploi des seniors en 2010.
2. À partir de quelle année, la France aura atteint son objectif.

Partie B

Le tableau ci-dessous indique le taux d'emploi des seniors en France entre 2001 et 2009 :

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Rang de l'année x	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Taux d'emploi des seniors en %	31,9	34,7	37	37,8	38,5	38,1	38,2	38,2	38,9

Source : INSEE, Eurostat

Désormais, à partir de 2001, on choisit un modèle logarithmique et on admettra qu'à partir de 2001, le taux d'emploi des seniors est donné par la fonction f définie sur $[9~;~+\infty[$ par

$$f(x) = a\ln(x+1) + b \text{ où } a \text{ et } b \text{ désignent deux nombres réels.}$$

1. En considérant les années 2001 et 2006, écrire le système d'équations que doivent vérifier a et b.

2. En déduire que $a = \dfrac{6,2}{\ln(1,5)}$.

Dans la suite, on admettra que $a = 15,3$ et $b = -3,3$.

3. Selon ce modèle, déterminer à partir de quelle année, la France aura atteint son objectif.

Exercice 3

On considère les fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad g(x) = -x+1 \quad \text{et} \quad h(x) = f(x) - g(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f et Δ la droite représentant la fonction g dans un repère orthonormé du plan.

Partie A – Position relative de $\mathscr{C}_f$ et de l'une de ses tangentes.

1. Vérifier, par le calcul, que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est la droite Δ.

2. **a.** Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.

b. Étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.

c. En déduire le sens de variation de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

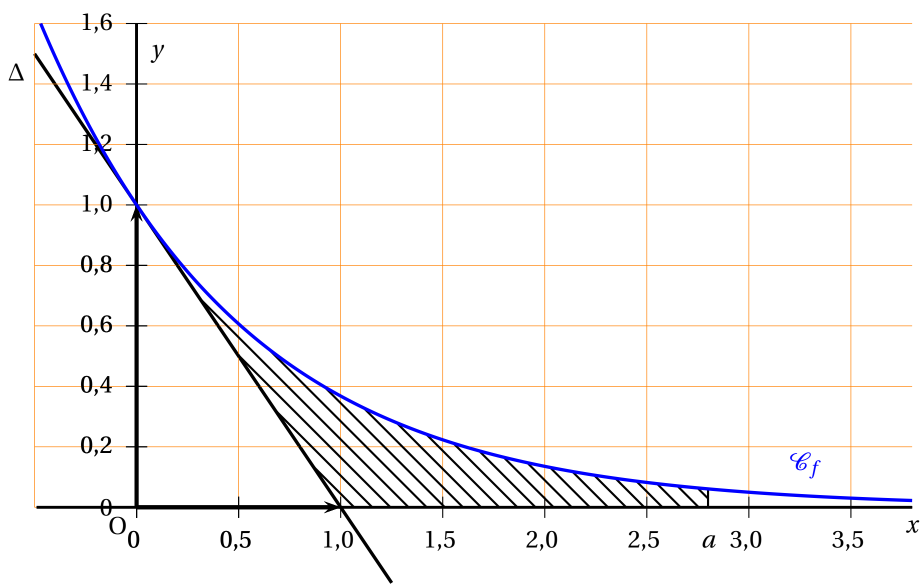
3. En utilisant les questions 1. et 2., étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de sa tangente au point d'abscisse 0.

Partie B – Calcul d'aire

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mathrm{e}}$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit a un nombre réel vérifiant $a > 1$. On appelle D le domaine colorié sur le graphique ci-dessous et on note $\mathscr{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine D.



a. Déterminer en fonction de a la valeur de $\mathscr{A}$.

b. Déterminer la limite de $\mathscr{A}$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Exercice 4

On rappelle que pour tout événement A et B d'un univers :

- l'événement « A et B » est noté $A \cap B$,
- la probabilité de l'événement A est notée $P(A)$,
- si $P(A) \neq 0$, alors la probabilité conditionnelle de B sachant A est notée $P_A(B)$.

Lors de l'année de terminale ES, les trois quarts des élèves travaillent sérieusement tout au long de l'année scolaire. Un candidat au baccalauréat ES a une probabilité de $0,9$ d'obtenir son bac s'il a travaillé sérieusement et une probabilité de $0,2$ s'il n'a pas travaillé sérieusement pendant l'année scolaire.
Un candidat est dit surpris s'il est admis alors qu'il n'a pas travaillé sérieusement pendant l'année scolaire ou bien s'il est refusé et qu'il a travaillé sérieusement pendant l'année scolaire. On note :

- T l'événement « le candidat a travaillé sérieusement »
- A l'événement « le candidat est admis au baccalauréat ES »
- S l'événement « Le candidat est surpris ».

On interroge au hasard un candidat au baccalauréat ES.
Dans tout l'exercice, on donnera des valeurs approchées arrondies au millième.

1. Construire un arbre pondéré traduisant les données de l'énoncé.

2. Déterminer la probabilité des événements suivants :

a. $T \cap A$

b. $T \cap \overline{A}$

c. $\overline{T} \cap A$

d. $\overline{T} \cap \overline{A}$

3. a. Déterminer la probabilité que le candidat interrogé soit admis.

b. Le candidat est admis. Déterminer la probabilité que ce candidat ait travaillé sérieusement pendant l'année scolaire.

4. Démontrer que la probabilité de l'événement S est $0,125$.

5. On interroge trois élèves au hasard. Calculer la probabilité qu'au moins un élève soit surpris ?