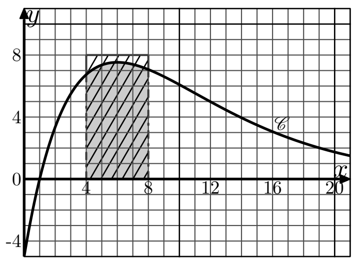
Intégration

Correction 1

Relativement aux deux domaines hachurés ci-dessous :

On a l'encadrement ci-dessous :

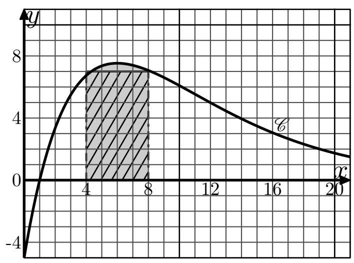
- Le domaine hachurée ci-dessous est un rectangle dont l'aire est :
  $8\times4 = 32$



Ce domaine comprend le domaine grisé défini par la courbe $\mathscr{C}$ et permet de donner la comparaison :

$$\int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 32$$

- Le domaine hachurée ci-dessous est un rectangle dont l'aire est :
  $8\times4 = 32$



Ce domaine est "*presque*" entièrement contenu dans le domaine grisé défini par la courbe $\mathscr{C}$ et permet de donner la comparaison :

$$28 \leqslant \int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ainsi, nous avons l'encadrement ci-dessous d'amplitude 4 :

$$28 \leqslant \int_4^8 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 32$$

Correction 2

D'après le tableau de variation :

- Sur l'intervalle $[-5\,;3]$, la fonction g admet le nombre 2 pour valeur minimale. Ainsi, le rectangle ayant pour côté l'intervalle $[-5\,;3]$ et pour hauteur 2 est inclus dans le domaine sous courbe g entre -5 et 3.
  On en déduit :
  $$8\times2 \leqslant \int_{-5}^3 g(x)\,\mathrm{d}x$$
  $$16 \leqslant \int_{-5}^3 g(x)\,\mathrm{d}x$$
- Sur l'intervalle $[-5\,;3]$, la fonction g admet le nombre 4 pour valeur maximale. Ainsi, le rectangle ayant pour côté l'intervalle $[-5\,;3]$ et pour hauteur 4 est inclus dans le domaine sous courbe g entre -5 et 3.
  On en déduit :
  $$\int_{-5}^3 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 8\times4$$
  $$\int_{-5}^3 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 32$$

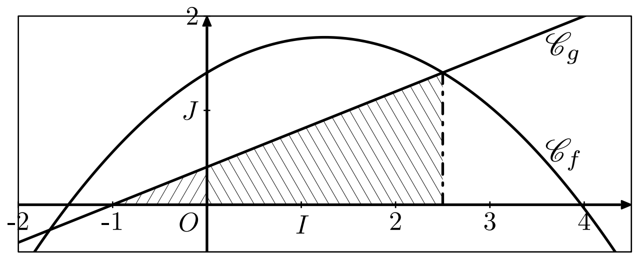
On en déduit : $16 \leqslant \displaystyle\int_{-5}^3 g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 32$

La réponse correcte est c..

Correction 3

- Déterminons l'aire du domaine sous la courbe g entre les droites d'équations $x=0$ et $x=2{,}5$.

  Pour cela les deux domaines hachurées ci-dessous :



permettent d'écrire la relation :

$$\int_{-1}^0 g(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{2,5} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2,5} g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^{2,5} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2,5} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^0 g(x)\,\mathrm{d}x$$

D'après les informations de l'énoncé, on a :

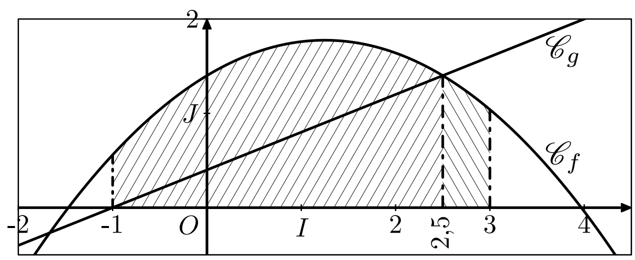
- $\displaystyle\int_{-1}^{2,5} g(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}2\times2{,}5^2 + 0{,}4\times2{,}5 + 0{,}2 = 2{,}45$
- $\displaystyle\int_{-1}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x = 0{,}2\times0^2 + 0{,}4\times0 + 0{,}2 = 0{,}2$

On en déduit la valeur de l'aire recherchée :

$$\int_0^{2,5} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2,5} g(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^0 g(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 2{,}45 - 0{,}2 = 2{,}25$$

- Déterminons l'aire du domaine sous la courbe f entre les droites d'équations $x=2{,}5$ et $x=3$.

  Pour cela les deux domaines hachurées ci-dessous :



permettent d'écrire la relation :

$$\int_{-1}^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2,5}^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_{2,5}^3 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^3 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$$

D'après les informations de l'énoncé, on a :

➡ $\displaystyle\int_{-1}^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x = -0,08\times2,5^3 + 0,3\times2,5^2 + 1,4\times2,5 + 0,3$
$= 4,425$

➡ $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = -0,08\times3^3 + 0,3\times3^2 + 1,4\times3 + 0,3$
$= 5,04$

On en déduit la valeur de l'aire recherchée :

$$\int_{2,5}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{-1}^{2,5} f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= 5,04 - 4,425 = 0,615$$

Ainsi, l'aire totale de la partie grise est déterminée par :

$$\int_{0}^{2,5} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{2,5}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = 2,25 + 0,615 = 2,835$$

Correction 4

Soit F une primitive de la fonction f

- Les réponses a. et b. sont fausses : Les autres primitives G s'obtiennent à partir de la primitive F en y additionnant une constante.
  Ainsi, il existe un réel k tel que :
  $G(x) = F(x) + k$
  Ainsi, il suffit de prendre k suffisamment grand pour que la primitive G soit positive au moins une fois sur $[0\,;2]$ ou $[2\,;8]$.
- De la relation $F' = f$, on en déduit :
  - ➡ La fonction f étant négative sur $[0\,;2]$, on en déduit que la fonction F est décroissante sur $[0\,;2]$.
    Il en sera de même de toutes les primitives de la fonction f. L'affirmation c. est fausse.
  - ➡ La fonction f étant positive sur $[8\,;12]$, on en déduit que la fonction F est croissante sur $[8\,;12]$.
    Il en sera de même de toutes les primites de la fonction f.
    L'affirmation d. est vraie.

Correction 5

1. L'expression de la fonction F est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
   $u(x) = -2{\cdot}x - 2 \quad ; \quad v(x) = e^{-x+3}$
   qui admettent pour dérivées :
   $u'(x) = -2 \quad ; \quad v'(x) = -e^{-x+3}$

   La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$F'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x)$

$$= -2{\cdot}e^{-x+3} + \big(-2{\cdot}x - 2\big){\cdot}\big(-e^{-x+3}\big)$$
$$= -2{\cdot}e^{-x+3} + \big(2{\cdot}x + 2\big){\cdot}e^{-x+3} = \big[-2 + \big(2{\cdot}x + 2\big)\big]{\cdot}e^{-x+3}$$
$$= 2{\cdot}x{\cdot}e^{-x+3} = f(x)$$

   On vient d'établir que la fonction F est la primitive de la fonction f.

2. L'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimité par les droites d'équation $x{=}1$, $x{=}3$, l'axe des abscisses et la courbe $\mathscr{C}$ a pour valeur :
   $$\mathcal{A} = \int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = F(3) - F(1)$$
   Par la fonction F, on a les images :
   - $F(1) = \big(-2\times1 - 2\big){\cdot}e^{-1+3} = \big(-2-2\big){\cdot}e^2 = -4{\cdot}e^2$
   - $F(3) = \big(-2\times3 - 2\big){\cdot}e^{-3+3} = \big(-6-2\big){\cdot}e^0$
     $= -8\times1 = -8$

   Ainsi, on a :
   $\mathcal{A} = F(3) - F(1) = -8 - \big(-4{\cdot}e^2\big) = 4{\cdot}e^2 - 8$

Correction 6

La fonction f définie par :
$f(x) = -2x + 20 - e^{-2x+10}$
admet pour primitive la fonction F définie par :

$$F(x) = -2{\cdot}\Big(\frac{1}{2}x^2\Big) + 20{\cdot}x - \frac{1}{-2}{\cdot}e^{-2x+10}$$
$$= -x^2 + 20{\cdot}x + \frac{1}{2}{\cdot}e^{-2x+10}$$

Ainsi, on a le calcul intégral :

$$\int_3^{13} f(x) = \big[F(x)\big]_3^{13} = \Big[-x^2 + 20{\cdot}x + \frac{1}{2}{\cdot}e^{-2x+10}\Big]_3^{13}$$
$$= \Big(\text{-}13^2{+}20{\times}13{+}\frac{1}{2}{\cdot}e^{-2\times13+10}\Big){-}\Big(\text{-}3^2{+}20{\times}3{+}\frac{1}{2}{\cdot}e^{-2\times3+10}\Big)$$
$$= \Big(-169 + 260 + \frac{1}{2}\times e^{-26+10}\Big) - \Big(-9 + 60 + \frac{1}{2}{\cdot}e^4\Big)$$
$$= 91 + \frac{1}{2}{\cdot}e^{-16} - 51 - \frac{1}{2}{\cdot}e^4 = 40 + \frac{1}{2}{\cdot}e^{-16} - \frac{1}{2}{\cdot}e^4$$
$$\simeq 12,70092 \simeq 12,701$$

Correction 7

a. $f(x) = 3x$	b. $f(x) = x^2 + x$
c. $f(x) = \frac{1}{4}x^4$	d. $f(x) = -2\ln(x)$
e. $f(x) = 2\sqrt{x}$	f. $f(x) = \frac{1}{2}{\cdot}e^{2x}$

Correction 8

a. $F(x) = x^2 + x$	b. $G(x) = x - \frac{3}{2}x^2$
c. $H(x) = \frac{2}{3}{\cdot}x^3$	d. $I(x) = \frac{1}{3}{\cdot}x^3 + \frac{1}{2}{\cdot}x^2 + x$
e. $J(x) = x^4$	f. $K(x) = x - \frac{2}{3}x^3$

Correction 9

a. La fonction f admet la fonction F pour primitive définie par la relation :
$F(x) = \dfrac{1}{x}$
On vérifie cette affirmation en dérivant la primitive :
$F'(x) = -\dfrac{1}{x^2} = f(x)$

b. La fonction g admet la fonction G pour primitive définie par la relation :
$G(x) = -\dfrac{2}{x}$
On vérifie cette affirmation en dérivant la primitive :
$G'(x) = -2\times\Big(-\dfrac{1}{x^2}\Big) = \dfrac{2}{x^2}$

c. La fonction h admet la fonction H pour primitive définie par la relation :
$H(x) = \sqrt{x}$
On vérifie cette affirmation en dérivant la primitive :
$H'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

d. La fonction j admet la fonction J pour primitive définie par la relation :
$J(x) = 4\sqrt{x}$

On vérifie cette affirmation en dérivant la primitive :
$J'(x) = 4\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

e. La fonction k admet la fonction K pour primitive définie par la relation :
$K(x) = \ln x$

On vérifie cette affirmation en dérivant la primitive :
$K'(x) = \dfrac{1}{x}$

f. La fonction ℓ admet la fonction L pour primitive définie par la relation :
$L(x) = e^x$

On vérifie cette affirmation en dérivant la primitive :
$L'(x) = e^x$

g. La fonction m admet la fonction M pour primitive définie par la relation :
$M(x) = 3e^x$

On vérifie cette affirmation en dérivant la primitive :
$M'(x) = 3\times e^x = 3e^x$

h. La fonction n admet la fonction N pour primitive définie par la relation :
$N(x) = -e^x$

On vérifie cette affirmation en dérivant la primitive :
$N'(x) = -1\times e^x = -e^x$

