Fonction logarithme népérien

Correction 1

L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$$f(x) = 3{\cdot}x - u(x){\cdot}v(x)$$
où les fonctions u et v sont définies par :
$$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = \ln x$$
qui admettent pour dérivées :
$$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f par :
$$f'(x) = 3 - \big[u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x)\big]$$
$$= 3 - \Big(1{\cdot}\ln x + x{\times}\frac{1}{x}\Big) = 3 - \ln x - 1 = 2 - \ln x$$
Ainsi, la réponse correcte est c..

Correction 2

L'expression de la fonction g donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
$$u(x) = x + 1 \quad ; \quad v(x) = \ln x$$
qui admettent pour dérivées :
$$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g :
$$g'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x) = 1{\cdot}\ln x + (x+1){\cdot}\frac{1}{x}$$
$$= \ln x + x{\times}\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \ln x + 1x + \frac{1}{x}$$
Ainsi, la réponse correcte est d..

Correction 3

L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$$f(x) = u(x){\cdot}v(x) - x$$
où les fonctions u et v sont définies par :
$$u(x) = x \quad ; \quad v(x) = \ln(x)$$
qui admettent pour dérivées :
$$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$
La formule de dérivation du produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x) - 1$$
$$= 1{\cdot}\ln(x) + x{\cdot}\frac{1}{x} - 1 = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$$
La réponse correcte est la réponse b..

Correction 4

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$$f(x) = u(x){\cdot}v(x) + 2{\cdot}x + 1$$
où les fonctions u et v sont définies par :
$$u(x) = -x \quad ; \quad v(x) = \ln(x)$$
qui admettent pour dérivées :
$$u'(x) = -1 \quad ; \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$
La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = -1{\cdot}\ln(x) + (-x){\cdot}\frac{1}{x} + 2 + 0$$
$$= -\ln(x) - 1 + 2 = -\ln(x) + 1$$

2. Résolvons l'inéquation suivante :
$$f'(x) \geqslant 0$$
$$-\ln(x) + 1 \geqslant 0$$
$$-\ln(x) \geqslant -1$$
$$\ln(x) \leqslant 1$$
La fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$e^{\ln(x)} \leqslant e^1$$
$$x \leqslant e^1$$
On en déduit le tableau de signe :

x	0		e^1		10
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

La fonction f est croissante sur l'intervalle $\big]0\,;e^1\big]$ et la fonction f est décroissante sur l'intervalle $\big[e^1\,;10\big]$: on en déduit que la fonction f admet un maximum pour $x = e^1$.

3. La valeur exacte du maximum du fonction f sur $\big]0\,;10\big]$ est :
$$f(e^1) = -e^1{\cdot}\ln\big(e^1\big) + 2{\times}e^1 + 1 = -e^1{\times}1 + 2{\cdot}e^1 + 1 = e^1 + 1$$

Correction 5

D'après les propriétés algébriques de la fonction logarithme, on a :
$$\ln\big(10{\cdot}e^2\big) = \ln\big(10\big) + \ln\big(e^2\big) = \ln\big(10\big) + 2$$
La réponse correcte est la réponse c..

Correction 6

On a les transformations algébriques :
$$\ln\Big(-\frac{1}{x}\Big) = \ln\Big(\frac{1}{-x}\Big) = -\ln\big(-x\big)$$
La réponse b. est correcte.

Correction 7

Résolvons l'équation :
$$x^{23} = 92$$
$$\ln\big(x^{23}\big) = \ln\big(92\big)$$
$$23{\cdot}\ln\big(x\big) = \ln\big(92\big)$$
$$\ln\big(x\big) = \frac{\ln\big(92\big)}{23}$$
$$e^{\ln(x)} = e^{\frac{\ln(92)}{23}}$$
$$x = e^{\frac{\ln(92)}{23}}$$
La réponse c. est correcte.

Correction 8

Résolvons l'équation :

$$x^{23} = 92$$
$$\ln\left(x^{23}\right) = \ln\left(92\right)$$
$$23\cdot\ln\left(x\right) = \ln\left(92\right)$$
$$\ln\left(x\right) = \frac{\ln\left(92\right)}{23}$$
$$e^{\ln(x)} = e^{\frac{\ln(92)}{23}}$$
$$x = e^{\frac{\ln(92)}{23}}$$

La réponse c. est correcte.

Correction 9

Résolvons l'équation :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{3}{10}$$
$$\ln\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right] = \ln\left(\frac{3}{10}\right)$$
$$x\cdot\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{3}{10}\right)$$
$$x = \frac{\ln\left(\frac{3}{10}\right)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$$
$$x = \frac{\ln 3 - \ln 10}{\ln 1 - \ln 2}$$
$$x = \frac{\ln 3 - \ln 10}{0 - \ln 2}$$
$$x = \frac{-\left(\ln 3 - \ln 10\right)}{\ln 2}$$
$$x = \frac{\ln 10 - \ln 3}{\ln 2}$$

La réponse correcte est la réponse b..

Correction 10

1. Dérivons termes à termes l'expression de la fonction f :

$$f'(x) = -2 + 0 - \left(-2\cdot e^{-2x+10}\right) = -2 + 2\cdot e^{-2x+10}$$
$$= 2\cdot\left(-1 + e^{-2x+10}\right)$$

2. a. Considérons l'inéquation :

$$f'(x) \geqslant 0$$
$$2\cdot\left(-1 + e^{-2x+10}\right) \geqslant 0$$

Le facteur 2 est positif :

$$-1 + e^{-2x+10} \geqslant 0$$
$$e^{-2x+10} \geqslant 1$$

La fonction logarithme est croissante :

$$\ln\left(e^{-2x+10}\right) \geqslant \ln(1)$$
$$-2x + 10 \geqslant 0$$
$$-2x \geqslant -10$$
$$x \leqslant \frac{-10}{-2}$$
$$x \leqslant 5$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation est : $\mathcal{S} = \left[3\,;5\right]$

b. On en déduit le tableau de signe de la fonction f' sur l'intervalle $\left[3\,;13\right]$:

x	3		5		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

On a les images suivantes arrondies à 10^3 :

- $f(3) = -2\times3 + 20 - e^{-2\times3+10} = 14 - e^4$
  $\simeq -40{,}9582 \simeq -40{,}958$
- $f(5) = -2\times5 + 20 - e^{-2\times5+10} = 10 - e^0 = 10 - 1 = 9$
- $f(13) = -2\times13 + 20 - e^{-2\times13+10} = -6 - e^{-16}$
  $\simeq -6{,}0000 \simeq -6{,}000$

Ainsi, la fonction f admet pour tableau de variation sur $\left[3\,;13\right]$:

x	3		5		10
Variation de f	-40,958	$\nearrow$	9	$\searrow$	-6

Correction 11

1. Les deux premiers termes de la suite $\left(u_n\right)$ ont pour valeur :

- $u_0 = -17{,}5\times0{,}92^0 + 37{,}5 = -17{,}5\times1 + 37{,}5 = 20$
- $u_1 = -17{,}5\times0{,}92^1 + 37{,}5 = -16{,}1 + 37{,}5 = 21{,}4$

2. De l'encadrement $0 \leqslant 0{,}92 < 1$, on a les limites :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} 0{,}92^n = 0 \implies \lim_{n\mapsto+\infty} -17{,}5\times0{,}92^n = 0$$
$$\implies \lim_{n\mapsto+\infty} -17{,}5\times0{,}92^n + 37{,}5 = 37{,}5$$
$$\implies \lim_{n\mapsto+\infty} u_n = 37{,}5$$

3. La limite de la suite ayant pour limite 37,5, on est sûr que la valeur 30 sera dépassée par les termes de la suite $\left(u_n\right)$.

Pour déterminer le premier rang n dont le terme u_n dépasse la valeur 30, il faut résoudre l'inéquation :

$$u_n \geqslant 30$$
$$-17{,}5\times0{,}92^n + 37{,}5 \geqslant 30$$
$$-17{,}5\times0{,}92^n \geqslant 30 - 37{,}5$$
$$-17{,}5\times0{,}92^n \geqslant -7{,}5$$
$$0{,}92^n \geqslant \frac{-7{,}5}{-17{,}5}$$
$$0{,}92^n \geqslant \frac{7{,}5}{17{,}5}$$

La fonction logarithme est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\ln\left(0{,}92^n\right) \geqslant \ln\left(\frac{7{,}5}{17{,}5}\right)$$
$$n\cdot\ln\left(0{,}92\right) \geqslant \ln\left(\frac{7{,}5}{17{,}5}\right)$$

On a la valeur approchée : $\ln(0{,}92) \simeq -0{,}083$

$$n \geqslant \frac{\ln\left(\frac{7{,}5}{17{,}5}\right)}{\ln\left(0{,}92\right)}$$

On a la valeur approchée : $\frac{\ln\left(\frac{7{,}5}{17{,}5}\right)}{\ln(0{,}92)} \simeq 10{,}16$

$$n \geqslant 10{,}16$$
$$n \geqslant 11$$

