

Probabilités

Exercice 1

Soit $(\Omega; \mathcal{P})$ un espace probabilisé où A et B sont deux événements de Ω tels que :

$$\mathcal{P}(A) = 0,36 \quad ; \quad \mathcal{P}(B) = 0,27$$

1. Que peut-on dire de A et de B si $\mathcal{P}(A \cup B) = 0,63$?
2. On suppose que : $\mathcal{P}(A \cup B) = 0,5$:
 - a. Que peut-on dire de A et de B ?
 - b. Quelle est la probabilité qu'un événement réalise simultanément les événements A et B .

Exercice 2

Le tableau ci-dessous donne, d'après un échantillon de 800 personnes interrogées en 2005, un aperçu de la lecture de la presse quotidienne en France.

	Tous les jours ou presque	Une ou deux fois par semaine	Seulement pendant certaines périodes	Rarement	Jamais	Total
Agriculteurs exploitants	1	10	2	8	79	100
Artisans, commerçants, chefs d'entreprise	11	11	5	7	66	100
Cadres	17	16	10	18	39	100
Professions intermédiaires	8	15	7	15	55	100
Employés	6	7	4	9	74	100
Ouvriers (y compris agricoles)	4	5	3	5	83	100
Retraités	6	7	2	6	79	100
Autres inactifs	5	9	4	9	73	100
Total en effectif	58	80	37	77	548	800
Pourcentages du total	7,25 %	10 %	4,625 %			

Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme décimale et éventuellement arrondis à 0,001 près.

Partie A.

1. La dernière ligne du tableau ci-dessous représente la part de chaque catégorie par rapport à l'échantillon total. Calculer les valeurs manquantes de cette dernière ligne.
2. Donner la probabilité qu'une personne choisie au hasard parmi les cadres ne lise jamais.

Partie B.

On choisit au hasard une personne dans cet échantillon de 800 personnes. Dans cette partie, on note les événements suivants :

- J l'évènement : "la personne choisie ne lit jamais" ;
- O l'évènement : "la personne choisie est un ouvrier".

1. Calculer les probabilités des événements J et O .
2. Calculer la probabilité de l'évènement $J \cap O$.
3. Calculer la probabilité de l'évènement $J \cup O$.

Exercice 3

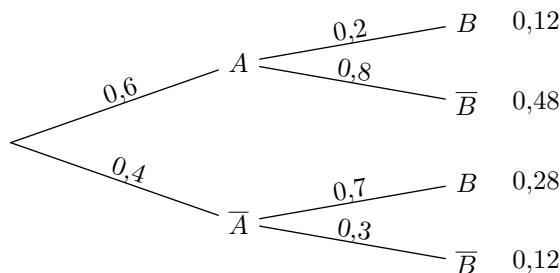
Soit $\mathcal{X}$ une variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous :

x_i	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{P}(X=x_i)$	0,05	0,12	0,15	0,23	0,17	a

- Déterminer la valeur de a afin que le tableau ci-dessous représente une loi de probabilité.
- Déterminer les probabilités suivantes :
 - $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 3)$
 - $\mathcal{P}(\mathcal{X} < 5)$

Exercice 4

Dans une expérience aléatoire, on considère les deux événements A et B . L'étude de cet expérience aléatoire a permis de produire l'arbre de probabilité ci-dessous :



Donner, si possible, par lecture de l'arbre les probabilités suivantes :

- $\mathcal{P}(A)$
- $\mathcal{P}(\overline{A} \cap B)$
- $\mathcal{P}(A \cap \overline{B})$
- $\mathcal{P}_B(\overline{A})$
- $\mathcal{P}_A(B)$
- $\mathcal{P}_{\overline{A}}(B)$

Exercice 5

Un centre de loisirs destiné aux jeunes de 11 ans à 18 ans compte 60 % de collégiens et 40 % de lycéens.

Le directeur a effectué une étude statistique sur la possession de téléphones portables. Cette étude a montré que 80 % des jeunes possèdent un téléphone portable et que, parmi les collégiens, 70 % en possèdent un.

On choisit au hasard un jeune du centre de loisirs et on s'intéresse aux événements suivants :

- C : "le jeune choisi est un collégien" ;
- L : "le jeune choisi est un lycéen" ;
- T : "le jeune choisi possède un téléphone portable".

Rappel des notations :

Si A et B sont deux événements, $p(A)$ désigne la probabilité que l'évènement A se réalise et $p_B(A)$ désigne la probabilité de A sachant que l'évènement B est réalisé.

On note aussi $\overline{A}$ l'évènement contraire de A .

- Donner les probabilités : $p(C)$, $p(L)$, $p(T)$, $p_C(T)$.
- Faire un arbre de probabilités représentant la situation et commencer à la renseigner avec les données de l'énoncé.
- Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien possédant un téléphone portable.
- Calculer la probabilité que le jeune choisi soit un collégien sachant qu'il possède un téléphone portable.
- Calculer $p(T \cap L)$, en déduire $p_L(T)$.
 - Compléter l'arbre construit dans la question 2.

Exercice 6

Un marathon est une épreuve sportive de course à pied.

Dans cet exercice, tous les résultats approchés seront donnés à 10^{-3} près.

Une étude portant sur le marathon de Tartonville montre que :

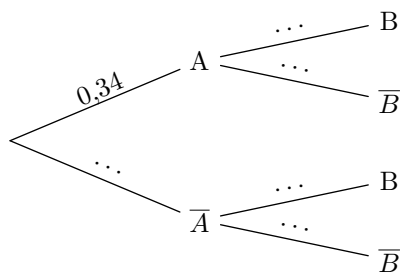
- 34 % des coureurs terminent la course en moins de 234 minutes ;
- parmi les coureurs qui terminent la course en moins de 234 minutes, 5 % ont plus de 60 ans ;
- parmi les coureurs qui terminent la course en plus de 234 minutes, 84 % ont moins de 60 ans.

On sélectionne au hasard un coureur et on considère les évènements suivants :

- A : “le coureur a terminé le marathon en moins de 234 minutes” ;
- B : “le coureur a moins de 60 ans”.

On rappelle que si E et F sont deux évènements, la probabilité de l'évènement E est notée $\mathcal{P}(E)$ et celle de E sachant F est notée $\mathcal{P}_F(E)$. De plus, $\overline{E}$ désigne l'évènement contraire de E .

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous associé à la situation de l'exercice :



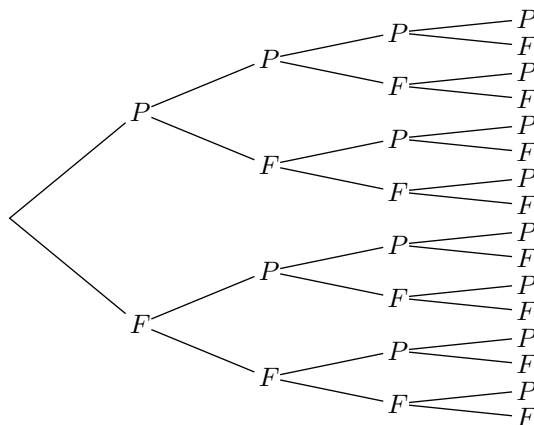
2.
 - a. Calculer la probabilité que la personne choisie ait terminé le marathon en moins de 234 minutes et soit âgée de plus de 60 ans.
 - b. Vérifier que : $\mathcal{P}(\overline{B}) \simeq 0,123$
 - c. Calculer $\mathcal{P}_{\overline{B}}(A)$ et interpréter le résultat dans le cadre de l'exercice.

Exercice 7

1. Un joueur lance une pièce qui n'est pas équilibrée dont la probabilité d'obtenir le côté face est de 0,63.

Quel est la probabilité d'obtenir le côté pile?

On considère maintenant le schéma de Bernoulli consistant à répéter quatre fois le lancer de cette pièce. Voici l'arbre de choix associé à cette répétition :



On remarquera que les branches $P-P-F-P$ et $P-F-P-P$ représentent des **issues** différentes de l'expérience aléatoire mais qu'elles réalisent trois piles et une face

2.
 - a. Combien d'issues correspondent à l'obtention de 3 côtés faces et 1 côté pile?
 - b. Quel est la probabilité d'une issue contenant 3 côtés faces et 1 côté pile?
 - c. En déduire la probabilité d'obtenir 3 côtés faces au cours de ce jeu.
3. On note $\mathcal{X}$ la variable aléatoire qui compte le nombre de face obtenu dans cette répétition de 4 lancers de la pièce.

Pour chacune des affirmations suivantes, quatre propositions sont faites mais une seule est correcte. Laquelle?

- a. La probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}=1)$ a pour valeur :
 - $0,63 \times 0,37^3$
 - $0,63^3 \times 0,37$
 - $4 \times 0,63 \times 0,37^3$
 - $4 \times 0,63^3 \times 0,37$
- b. La probabilité $\mathcal{P}(\mathcal{X}=2)$ a pour valeur :
 - $4 \times 0,63 \times 0,37$
 - $4 \times 0,63^2 \times 0,37^2$
 - $6 \times 0,63 \times 0,37$
 - $6 \times 0,63^2 \times 0,37^2$

Exercice 8

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ permet de connaître le nombre de chemin de l'arbre de choix réalisant k succès pour n répétitions.



Ci-dessous est donnée la capture de l'écran d'une calculatrice pour le calcul du coefficient binomial $\binom{5}{3}$:

Pour une variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant une loi binomiale de paramètre n et p , la probabilité que la variable aléatoire prenne la valeur k a pour valeur :

$$\mathcal{P}(\mathcal{X}=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

1. A l'aide de la calculatrice, déterminer les coefficients binomiaux ci-dessous :

a. $\binom{5}{3}$ b. $\binom{4}{0}$ c. $\binom{4}{2}$ d. $\binom{7}{5}$

2. Considérons la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètre $\mathcal{B}(12; 0,3)$. Déterminer les probabilités suivantes arrondies à 10^{-4} près :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=3)$ a. $\mathcal{P}(\mathcal{X}=7)$

3. Considérons la variable aléatoire $\mathcal{X}$ suivant la loi binomiale de paramètre $\mathcal{B}(8; 0,4)$. Déterminer les probabilités suivantes en passant par le complémentaire :

a. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \geq 1)$ a. $\mathcal{P}(\mathcal{X} \leq 19)$