Probabilités

Correction 1

1. La relation sur la probabilité d'une union d'évènements donne :
$$\mathcal{P}(A\cup B)=\mathcal{P}(A)+\mathcal{P}(B)-\mathcal{P}(A\cap B)$$
$$0{,}63=0{,}36+0{,}27-\mathcal{P}(A\cap B)$$
$$0{,}63=0{,}63-\mathcal{P}(A\cap B)$$
$$-\mathcal{P}(A\cap B)=0$$
$$\mathcal{P}(A\cap B)=0$$
Ainsi, le fait que $\mathcal{P}(A\cup B)=0{,}63$ entraine que les deux évènements sont disjoints.

2. a. Puisque $\mathcal{P}(A\cup B)\neq\mathcal{P}(A)+\mathcal{P}(B)$, on en déduit que les deux évènements A et B ne sont pas disjoints.

   b. On a la relation suivante :
$$\mathcal{P}(A\cup B)=\mathcal{P}(A)+\mathcal{P}(B)-\mathcal{P}(A\cap B)$$
$$0{,}5=0{,}36+0{,}27-\mathcal{P}(A\cap B)$$
$$0{,}5=0{,}63-\mathcal{P}(A\cap B)$$
$$0{,}5-0{,}63=-\mathcal{P}(A\cap B)$$
$$-0{,}13=-\mathcal{P}(A\cap B)$$
$$\mathcal{P}(A\cap B)=0{,}13$$

Correction 2

Partie A.

1. Voici le calcul des deux pourcentages manquant :
   - Au total, il y a 77 personnes intérogés sur un total de 800 personnes, cette catégorie de personnes représente un pourcentage de :
   $$\frac{77}{800}\simeq 0{,}096$$
   - Au total, il y a 548 personnes intérogés sur un total de 800 personnes, cette catégorie de personnes représente un pourcentage de :
   $$\frac{548}{800}\simeq 0{,}685$$

2. Il y a au total 100 cadres et parmi eux, 39 ne lisent jamais. Ainsi, le pourcentage de personnes ne lisant jamais parmi les cadres est égal à :
$$\frac{39}{100}\simeq 0{,}39$$

Partie B.

1. On a autant de chance de choisir une personne qu'une autre. On a les probabilités suivantes :
   - $\mathcal{P}(J)=\dfrac{548}{800}\simeq 0{,}685$
   - $\mathcal{P}(O)=\dfrac{100}{800}\simeq 0{,}125$

2. Il y a 83 ouvriers qui ne lisent jamais la presse quotidienne. On a :
$$\mathcal{P}(O\cap J)=\frac{83}{800}\simeq 0{,}104$$

3. On a l'égalité suivante :
$$\mathcal{P}(O\cup J)=\mathcal{P}(O)+\mathcal{P}(J)-\mathcal{P}(O\cap J)$$
$$=0{,}685+0{,}125-0{,}104=0{,}706$$

Correction 3

1. Pour que ce tableau présente une loi de probabilité, il faut que la somme des probabilités des évènements élémentaire vale 1. Ainsi, le nombre a vérifie l'égalité suivante :
$$0{,}05+0{,}12+0{,}15+0{,}23+0{,}17+a=1$$
$$0{,}72+a=1$$
$$a=1-0{,}72=0{,}28$$
On a ainsi la probabilité : $\mathcal{P}(\mathcal{X}=6)=0{,}28$

2. a. On a :
$$\{\mathcal{X}\geqslant 3\}=\{\mathcal{X}=3\}\cup\{\mathcal{X}=4\}\cup\{\mathcal{X}=5\}\cup\{\mathcal{X}=6\}$$
On en déduit la probabilité suivante :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}\geqslant 3)=0{,}15+0{,}23+0{,}17+0{,}28=0{,}83$$

   b. On a :
$$\{\mathcal{X}<5\}=\{\mathcal{X}=1\}\cup\{\mathcal{X}=2\}\cup\{\mathcal{X}=3\}\cup\{\mathcal{X}=4\}$$
On en déduit la probabilité suivante :
$$\mathcal{P}(\mathcal{X}<5)=0{,}05+0{,}12+0{,}15+0{,}23=0{,}55$$

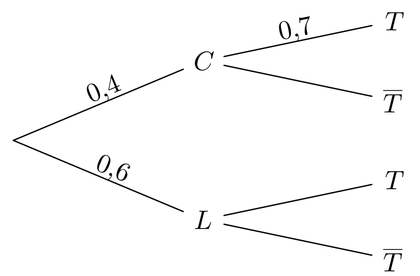
Correction 4

a. $\mathcal{P}(A)=0{,}6$	b. $\mathcal{P}(\overline{A}\cap B)=0{,}28$
c. $\mathcal{P}(A\cap\overline{B})=0{,}48$	d. $\mathcal{P}_B(\overline{A})$ impossible
e. $\mathcal{P}_A(B)=0{,}2$	f. $\mathcal{P}_{\overline{A}}(B)=0{,}7$

Correction 5

1. - D'après lénoncé, il y a 60 % de collégiens. On a :
   $$p(C)=\frac{60}{100}=0{,}6$$
   - D'après l'énoncé, il y a 40 % de lycéens. On a :
   $$p(L)=\frac{40}{100}=0{,}4$$
   - D'après l'énoncé, il y a 80 % des jeunes qui possèdent un portable. On a :
   $$p(T)=\frac{80}{100}=0{,}8$$
   - D'après l'énoncé et parmi les collégiens, il y a 70 % de collégiens qui possèdent un portable. On a :
   $$p_C(T)=\frac{70}{100}$$

2. Voici l'arbre de probabilité complété :



3. D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :
$$p_C(T)=\frac{p(C\cap T)}{p(C)}$$
$$0{,}7=\frac{p(C\cap T)}{0{,}6}$$
$$p(C\cap T)=0{,}7\times 0{,}6$$
$$p(C\cap T)=0{,}42$$

4. D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$p_T(C) = \frac{p(T\cap C)}{p(T)}$$

$$p_T(C) = \frac{0{,}42)}{0{,}8}$$

$$p_T(C) = 0{,}525$$

5. a. Les deux évènements C et L forment une partition de l'univers :

- $C\cap L = \varnothing$: un jeune ne peut être un collégien et un lycéen en même temps ;
- $C\cup L = \Omega$: on remarque que : $p(C)+p(L) = 0{,}6+0{,}4 = 1$

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$p(T) = p(C\cap T) + p(L\cap T)$$

$$0{,}8 = 0{,}42 + p(L\cap T)$$

$$p(L\cap T) = 0{,}8 - 0{,}42$$

$$p(L\cap T) = 0{,}38$$

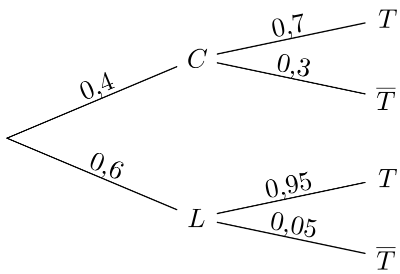
D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$p_L(T) = \frac{p(L\cap T)}{p(L)}$$

$$p_L(T) = \frac{0{,}38}{0{,}4}$$

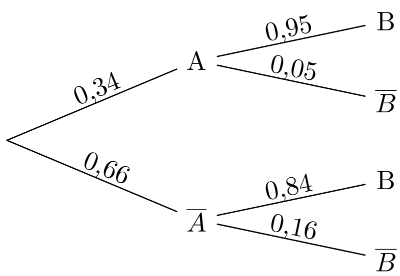
$$p_L(T) = 0{,}95$$

b. Voici l'arbre complété :



Correction 6

1. Voici l'arbre complété :



2. a. On cherche la probabilité de l'évènement $A\cap\overline{B}$.
D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$\mathcal{P}_A(\overline{B}) = \frac{\mathcal{P}(A\cap\overline{B})}{\mathcal{P}(A)}$$

$$0{,}05 = \frac{\mathcal{P}(A\cap\overline{B})}{0{,}34}$$

$$\mathcal{P}(A\cap\overline{B}) = 0{,}05\times0{,}34$$

$$\mathcal{P}(A\cap\overline{B}) = 0{,}017$$

b. D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :

$$\mathcal{P}_{\overline{A}}(\overline{B}) = \frac{\mathcal{P}(\overline{A}\cap\overline{B})}{\mathcal{P}(\overline{A})}$$

$$0{,}16 = \frac{\mathcal{P}(\overline{A}\cap\overline{B})}{0{,}66}$$

$$\mathcal{P}(\overline{A}\cap\overline{B}) = 0{,}16\times0{,}66$$

$$\mathcal{P}(\overline{A}\cap\overline{B}) = 0{,}1056$$

Les évènements A et $\overline{A}$ forment une partition de l'univers.
D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$\mathcal{P}(\overline{B}) = \mathcal{P}(A\cap\overline{B}) + \mathcal{P}(\overline{A}\cap\overline{B})$$

$$= 0{,}017 + 0{,}1056 = 0{,}1226$$

$$\simeq 0{,}123$$

c. D'après la définition des probabilités conditionnelles, on a :

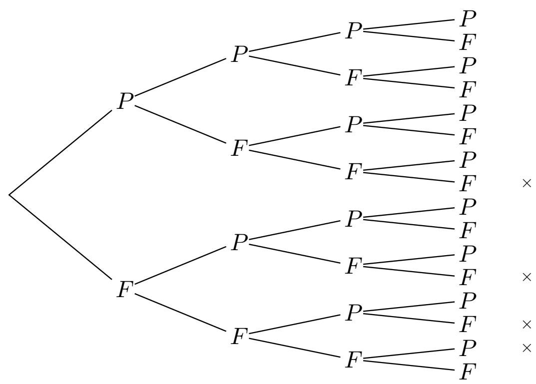
$$\mathcal{P}_{\overline{B}}(A) = \frac{\mathcal{P}(\overline{B}\cap A)}{\mathcal{P}(\overline{B})} = \frac{0{,}017}{0{,}1226} \simeq 0{,}13866 \simeq 0{,}139$$

On interprète ainsi : "*Sachant que le coureur a plus de 60, la probabilité qu'il termine la course en moins de 234 minutes est de* 0,139".

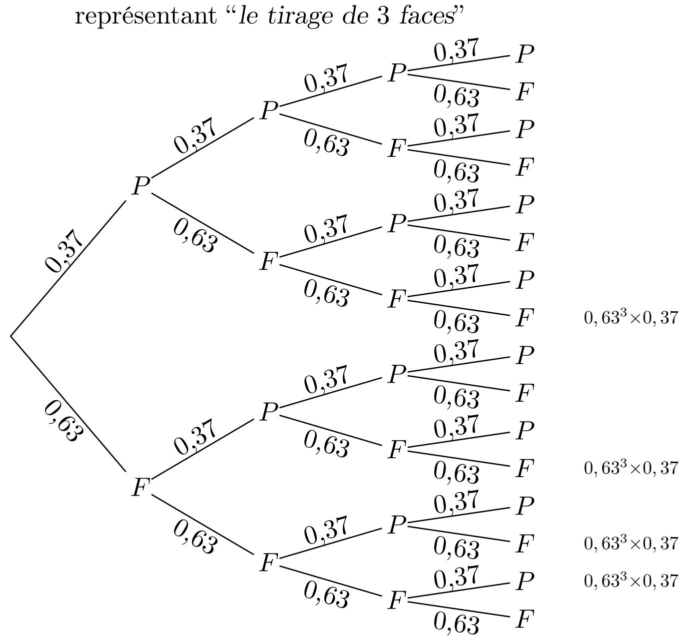
Correction 7

1. L'évènement "*avoir un pile*" est l'évènement complémentaire de "*avoir un face*". Ainsi, il a pour probabilité :
$1 - 0{,}63 = 0{,}37$

2. a. Sont indiqués ci-dessous les issues représentant "*le tirage de 3 faces*".



b. Voici les probabilités de chacune des branches représentant "*le tirage de 3 faces*"



On remarque que les probabilités de ces quatre issues sont égales.

c. Ainsi, la probabilité d'obtenir 3 faces et 1 pile dans le lancer de quatre fois la pièce est égale à :
$4\times 0{,}63^3\times 0{,}37$

3. a. La probabilité d'obtenir 1 face est :
$\mathcal{P}\big(\mathcal{X}{=}1\big) = 4\times 0{,}63\times 0{,}37^3$

b. La probabilité d'obtenir 2 face est :
$\mathcal{P}\big(\mathcal{X}{=}2\big) = 6\times 0{,}63^2\times 0{,}37^2$

Correction 8

1. a. $\binom{5}{3} = 10$ b. $\binom{4}{0} = 1$

c. $\binom{4}{2} = 6$ d. $\binom{7}{5} = 21$

2. a. $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}{=}3\big) = \binom{12}{3}\times 0{,}3^3\times\big(1-0{,}3\big)^9$

$= 220\times 0{,}3^3\times 0{,}7^9 \simeq 0{,}2397$

b. $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}{=}7\big) = \binom{12}{7}\times 0{,}3^7\times\big(1-0{,}3\big)^5$

$= 792\times 0{,}3^7\times 0{,}7^5 \simeq 0{,}0291$

3. a. $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}{\geqslant}1\big) = 1-\mathcal{P}\big(\mathcal{X}{<}1\big) = 1-\mathcal{P}\big(\mathcal{X}{=}0\big)$

$= 1-\binom{8}{0}\times 0{,}4^0\times 0{,}6^8$

$\simeq 1-0{,}01679 \simeq 0{,}9832$

b. $\mathcal{P}\big(\mathcal{X}{\leqslant}7\big) = 1-\mathcal{P}\big(\mathcal{X}{>}7\big) = 1-\mathcal{P}\big(\mathcal{X}{=}8\big)$

$\simeq 1-0{,}00065 \simeq 0{,}9993$