La fonction exponentielle

Exercice 1

Simplifier les expressions suivantes :

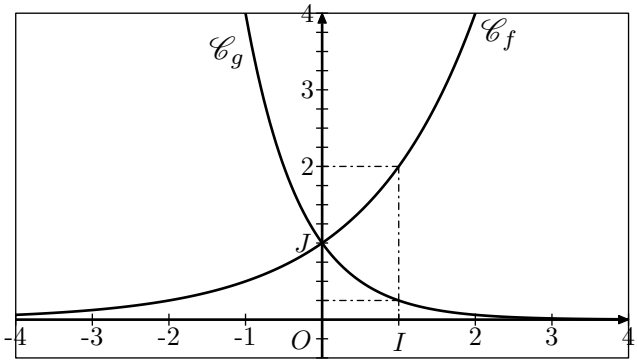
a. $2^4 \times 2^3$ b. $\dfrac{5^8}{5^3}$ c. $\left(3^2\right)^4$

d. $3^4 \times 9^3$ e. $\dfrac{4^9}{2^5}$ f. $2^5 - 2^4$

Exercice 2

On considère les deux fonction f et g admettant chacune une expression de la forme :
$f : x \longmapsto q^x$; $g : x \longmapsto q'^x$ où q, $q' \in]0\,;+\infty[$

Les fonctions f et g sont des fonctions exponentielles respectivement de base q et q'.



1. Par observation du sens de variation de chacune des fonctions f et g. Que peut-on dire de la base q de chacune d'elles?
2. Graphiquement et par l'image du nombre 1, déterminer l'expression des fonctions f et g.

Exercice 3

Simplifier les expressions suivantes :

a. $e^3 \cdot e^4$ b. $e^4 \cdot e^{-4}$

c. $\left(e^4\right)^3 \cdot e^4$ d. $\dfrac{e^5 \cdot e^{-3}}{e^{-2}}$

e. $\left(e^5 - e^4\right)^2 - \left(e^5 + e^4\right)^2$ f. $\dfrac{e^6 - e^3}{e \cdot e^2}$

Exercice 4

Pour chaque fonction, déterminer l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

a. $f(x) = e^x$ b. $f(x) = e^{2 \cdot x}$ c. $f(x) = e^{3-x}$

d. $f(x) = e^{2-x^2}$ e. $f(x) = e^{x^2+1}$ f. $f(x) = e^{x^2+x+1}$

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (x+1) \cdot e^{-2x+3}$.

Parmi les quatre propositions proposées, laquelle est vraie? La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f' est donnée par :

a. $f'(x) = -2 \cdot e^{-2x+3}$ b. $f'(x) = e^{-2x+3}$

c. $f'(x) = (-2x+3)e^{-2x+3}$ d. $f'(x) = (-2x-1)e^{-2x+3}$

Exercice 6

On considère un fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[-3\,;2]$. On note f' la fonction dérivée de la fonction f. On donne les informations suivantes sur la fonction f :
$f(0) = 3$; $f'(1) = 0$; $f'(0) = 0{,}5$

CC BY-NC

On admet qu'il existe trois réels a, b, c pour lesquels la fonction f définie ci-dessus est définie, pour tout x de $[-3\,;2]$, par :
$f(x) = (a{\cdot}x^2 + b{\cdot}x + c){\cdot}e^x + 5$.

1. En utilisant une des informations précédentes, justifier que $c = -2$.

2. On admet que la fonction dérivée f' est donnée, pour tout réel x de $[-3\,;2]$, par :
$f'(x) = [a{\cdot}x^2 + (2{\cdot}a + b){\cdot}x - 2 + b]{\cdot}e^x$

En utilisant les informations précédentes, justifier que $b = 2{,}5$ puis que $a = -1$.

Exercice 7

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{0{,}5 + 100{\cdot}e^{-x}}$$
On note f' la fonction dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

Montrer que, pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}$, on a :
$$f'(x) = \frac{100{\cdot}e^{-x}}{(0{,}5 + 100{\cdot}e^{-x})^2}$$

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = \frac{100{\cdot}e^{-x}}{0{,}5 + 100{\cdot}e^{-x}}$$
On note g' la fonction dérivée de g sur $\mathbb{R}$.

Montrer que, pour tout réel x appartenant à $\mathbb{R}$, on a :
$$g'(x) = \frac{-50{\cdot}e^{-x}}{(0{,}5 + 100{\cdot}e^{-x})^2}$$

Exercice 8

On considère la fonction f définie, pour tout réel x de l'intervalle $[-2\,;4]$, par :
$f(x) = (x + 2){\cdot}e^{-x+1}$

On note f' la fonction dérivée de f.

1. Montrer que, pour tout x de l'intervalle $[-2\,;4]$, on a :
$f'(x) = -(x + 1){\cdot}e^{-x+1}$

2. Etudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[-2\,;4]$ puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Exercice 9

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[-20\,;20]$ par :
$f(x) = (-2{\cdot}x + 30){\cdot}e^{0{,}2{\cdot}x-3}$

1. a. Montrer que $f'(x) = (-0{,}4{\cdot}x + 4){\cdot}e^{0{,}2{\cdot}x-3}$ pour tout réel x de l'intervalle $[-20\,;20]$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[-20\,;20]$. On précisera la valeur exacte du maximum de f.

2. a. Montrer que, sur l'intervalle $[-20\,;20]$, l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α.

b. Donner un encadrement de α d'amplitude 0,1.

Exercice 10

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1\,;25]$ par :
$$f(x) = 10 - \frac{e^{0{,}2x+1}}{x}$$

Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants que l'on pourra utiliser :

f(x):10 - e^(0.2 x+1)/x
$$x \longmapsto 10 - \frac{\exp(0.2x + 1)}{x}$$
factoriser(deriver(f(x)))
$$\frac{\exp(0.2{\cdot}x + 1){\cdot}(1 - 0.2{\cdot}x)}{x^2}$$
factoriser(deriver(deriver(f(x))))
$$\frac{\exp(0.2{\cdot}x + 1){\cdot}(-x^2 + 10{\cdot}x - 50)}{25{\cdot}x^3}$$

CC BY-NC

1. Retrouver par le calcul l'expression factorisé de $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f.
2. Etudier le signe de f' sur l'intervalle $\left[1\,;25\right]$ et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $\left[1\,;25\right]$. On arrondira les valeurs au millième.
3. On s'intéresse à l'équation $f(x)=0$.
   a. Montrer que l'équation $f(x)=0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $\left[1\,;5\right]$.
   b. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $\left[5\,;25\right]$.
   c. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution α

CC BY-NC