La fonction exponentielle

Correction 1

a. $2^4 \times 2^3 = 2^{4+3} = 2^7$

b. $\dfrac{5^8}{5^3} = 5^{8-3} = 5^5$

c. $\left(3^2\right)^4 = 3^{2\times 4} = 3^8$

d. $3^4 \times 9^3 = 3^4 \times \left(3^2\right)^3 = 3^4 \times 3^{2\times 3} = 3^4 \times 3^6 = 3^{4+6} = 3^{10}$

e. $\dfrac{4^9}{2^5} = \dfrac{\left(2^2\right)^9}{2^5} = \dfrac{2^{2\times 9}}{2^5} = \dfrac{2^{18}}{2^5} = 2^{13}$

f. $2^5 - 2^4 = 2^4 \times 2 - 2^4 \times 1 = 2^4 \cdot \left(2-1\right) = 2^4$

Correction 2

1. La fonction f est croissante : on en déduit que la base q définissant la fonction f est strictement positive.

   La fonction g est décroissante : on en déduit que la base q définissant la fonction f est strictement négative.

2. - Graphiquement, l'image de 1 par la fonction f a pour valeur :
     $$f(1) = 2$$
     $$q^1 = 2$$
     $$q = 2$$
     La fonction f est la fonction exponentielle de base 2.
   - Graphiquement, l'image de 1 par la fonction g a pour valeur :
     $$g(1) = 0{,}25$$
     $$q^1 = 0{,}25$$
     $$q = 0{,}25$$
     La fonction f est la fonction exponentielle de base 0,25.

Correction 3

a. $e^3 \cdot e^4 = e^{3+4} = e^7$

b. $e^4 \cdot e^{-4} = e^{4+(-4)} \cdot e^0 = 1$

c. $\left(e^4\right)^3 \cdot e^4 = e^{3\times 4} \cdot e^4 = e^{12} \cdot e^4 = e^{12+4} = e^{16}$

d. $\dfrac{e^5 \cdot e^{-3}}{e^{-2}} = \dfrac{e^{5+(-3)}}{e^{-2}} = \dfrac{e^2}{e^{-2}} = e^{2-(-2)} = e^4$

e. $\left(e^5 - e^4\right)^2 - \left(e^5 + e^4\right)^2$
$$= \Big[\left(e^5\right)^2 - 2\cdot e^5 \cdot e^4 + \left(e^4\right)^2\Big] - \Big[\left(e^5\right)^2 + 2\cdot e^5 \cdot e^4 + \left(e^4\right)^2\Big]$$
$$= \left(e^{10} - 2\cdot e^9 + e^8\right) - \left(e^{10} + 2\cdot e^9 + e^8\right) = -4\cdot e^9$$

f. $\dfrac{e^6 - e^3}{e \cdot e^2} = \dfrac{e^6 - e^3}{e^3} = \dfrac{e^6}{e^3} - \dfrac{e^3}{e^3} = e^3 - 1$

Correction 4

a. $f'(x) = e^x$

b. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$$f(x) = e^{u(x)}$$
où la fonction u est définie par :
$$u(x) = 2\cdot x \quad ; \quad u'(x) = 2$$
La formule de dérivation de la fonction exponentielle donne l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = u'(x)\cdot e^{u(x)} = 2\cdot e^{2\cdot x}$$

c. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$$f(x) = e^{u(x)}$$
où la fonction u est définie par :
$$u(x) = 3 - x \quad ; \quad u'(x) = -1$$
La formule de dérivation de la fonction exponentielle donne l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = u'(x)\cdot e^{u(x)} = -1\cdot e^{3-x} = -e^{3-x}$$

d. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$$f(x) = e^{u(x)}$$
où la fonction u est définie par :
$$u(x) = 2 - x^2 \quad ; \quad u'(x) = -2\cdot x$$
La formule de dérivation de la fonction exponentielle donne l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = u'(x)\cdot e^{u(x)} = -2x\cdot e^{2-x^2}$$

e. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$$f(x) = e^{u(x)}$$
où la fonction u est définie par :
$$u(x) = x^2 + 1 \quad ; \quad u'(x) = 2\cdot x$$
La formule de dérivation de la fonction exponentielle donne l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = u'(x)\cdot e^{u(x)} = 2x\cdot e^{x^2+1}$$

f. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$$f(x) = e^{u(x)}$$
où la fonction u est définie par :
$$u(x) = x^2 + x + 1 \quad ; \quad u'(x) = 2\cdot x + 1$$
La formule de dérivation de la fonction exponentielle donne l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = u'(x)\cdot e^{u(x)} = \left(2\cdot x + 1\right)\cdot e^{x^2+x+1}$$

Correction 5

L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
$$u(x) = x + 1 \quad ; \quad v(x) = e^{-2x+3}$$
qui admettent pour dérivées :
$$u'(x) = 1 \quad ; \quad v'(x) = -2\cdot e^{-2x+3}$$
La formule de dérivation du produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x)$$
$$= 1\cdot e^{-2x+3} + \left(x+1\right)\cdot\left(-2\cdot e^{-2x+3}\right)$$
$$= e^{-2x+3} + \Big[\left(x+1\right)\cdot\left(-2\right)\Big]\cdot e^{-2x+3}$$
$$= e^{-2x+3} + \left(-2x-2\right)\cdot e^{-2x+3}$$
$$= \Big[1 + \left(-2x-2\right)\Big]\cdot e^{-2x+3} = \left(-2x-1\right)\cdot e^{-2x+3}$$
Ainsi, la réponse correcte est d..

Correction 6

1. De l'information $f(0)=3$, on a :

$$\begin{aligned} f(0) &= 3\\ \big(a\times 0^2+b\times 0+c\big)\cdot e^0+5 &= 3\\ c\times 1+5 &= 3\\ c &= 3-5\\ c &= -2 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f admet pour expression :
$f(x)=\big(a\cdot x^2+b\cdot x-2\big)\cdot e^x+5$.

2. De l'information $f'(0)=0{,}5$, on a :

$$\begin{aligned} f'(0) &= 0{,}5\\ \big[a\times 0^2+\big(2\cdot a+b\big)\times 0-2+b\big]\cdot e^0 &= 0{,}5\\ \big(-2+b\big)\times 1 &= 0{,}5\\ -2+b &= 0{,}5\\ b &= 0{,}5+2\\ b &= 2{,}5 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f' admet pour expression :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \big[a\cdot x^2+\big(2\cdot a+b\big)\cdot x-2+b\big]\cdot e^x\\ &= \big[a\cdot x^2+\big(2\cdot a+2{,}5\big)\cdot x-2+2{,}5\big]\cdot e^x\\ &= \big[a\cdot x^2+\big(2\cdot a+2{,}5\big)\cdot x+0{,}5\big]\cdot e^x \end{aligned}$$

De l'information $f'(1)=0$, on a :

$$\begin{aligned} f'(1) &= 0\\ \big[a\times 1^2+\big(2\cdot a+2{,}5\big)\cdot 1+0{,}5\big]\cdot e^1 &= 0\\ \big(a+2\cdot a+2{,}5+0{,}5\big)\cdot e^1 &= 0\\ \big(3\cdot a+3\big)\cdot e^1 &= 0 \end{aligned}$$

Le nombre e^1 est strictement positif : donc non-nul :

$$\begin{aligned} 3\cdot a+3 &= 0\\ 3\cdot a &= -3\\ a &= -1 \end{aligned}$$

La fonction f admet pour expression :
$f(x)=\big(-x^2+2{,}5\cdot x-2\big)\cdot e^x+5$.

Correction 7

1. La fonction f est définie comme l'inverse de la fonction u définie par :
$u(x)=0{,}5+100\cdot e^{-x}$; $u'(x)=-100\cdot e^{-x}$

La formule de dérivation de l'inverse d'une fonction permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivé de la fonction f :

$$f'(x)=-\frac{u'(x)}{\big[u(x)\big]^2}=-\frac{-100\cdot e^{-x}}{\big(0{,}5+100\cdot e^{-x}\big)^2}=\frac{100\cdot e^{-x}}{\big(0{,}5+100\cdot e^{-x}\big)^2}$$

2. L'expression de la fonction g est donnée sour la forme du quotient des fonctions u et v définies par :
$u(x)=100\cdot e^{-x}$; $v(x)=0{,}5+100\cdot e^{-x}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x)=-100\cdot e^{-x}$; $v'(x)=-100\cdot e^{-x}$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction g' dérivée de la fonction g :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{\big[u(x)\big]^2}\\ &= \frac{-100\cdot e^{-x}\cdot\big(0{,}5+100\cdot e^{-x}\big)-100\cdot e^{-x}\cdot\big(-100\cdot e^{-x}\big)}{\big(0{,}5+100\cdot e^{-x}\big)^2}\\ &= \frac{-100\cdot e^{-x}\cdot\big(0{,}5+100\cdot e^{-x}\big)-100\cdot e^{-x}\cdot\big(-100\cdot e^{-x}\big)}{\big(0{,}5+100\cdot e^{-x}\big)^2}\\ &= \frac{-100\cdot e^{-x}\cdot\big[\big(0{,}5+100\cdot e^{-x}\big)+\big(-100\cdot e^{-x}\big)\big]}{\big(0{,}5+100\cdot e^{-x}\big)^2}\\ &= \frac{-100\cdot e^{-x}\cdot\big(0{,}5\big)}{\big(0{,}5+100\cdot e^{-x}\big)^2}=\frac{-50\cdot e^{-x}}{\big(0{,}5+100\cdot e^{-x}\big)^2} \end{aligned}$$

Correction 8

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme d'un produit des fonctions u et v définies par :
$u(x)=x+2$; $v(x)=e^{-x+1}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x)=1$; $v'(x)=-e^{-x+1}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)=1\cdot e^{-x+1}+\big(x+2\big)\cdot\big(-e^{-x+1}\big)\\ &= e^{-x+1}+\big(-x-2\big)\cdot e^{-x+1}=\big(1-x-2\big)\cdot e^{-x+1}\\ &= \big(-x-1\big)\cdot e^{-x+1}=-\big(x+1\big)\cdot e^{-x+1} \end{aligned}$$

2. Le signe de l'expression $-\big(x+1\big)$ sur $\mathbb{R}$ est donné dans le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-(x+1)$		$+$	0	$-$	

La fonction exponentielle étant strictement positif, le signe de la fonction f' est celui de son facteur $-(x+1)$:

x	-2		-1		4
$-(x+1)$		$+$	0	$-$	

On a les images suivantes par la fonction f :

- $f(-2)=\big(-2+2\big)\cdot e^{-(-2)+1}=0\cdot e^3=0$
- $f(-1)=\big(-1+2\big)\cdot e^{-(-1)+1}=1\cdot e^2=e^2$
- $f(4)=\big(4+2\big)\cdot e^{-4+1}=6\cdot e^{-3}$

On obtient le tableau de variations de la fonction f :

x	-2		-1		4
Variation de f	0	$\nearrow$	e^2	$\searrow$	$6\cdot e^{-3}$

Correction 9

1. **a.** L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v définies par :
$u(x)=-2\cdot x+30$; $v(x)=e^{0{,}2\cdot x-3}$
qui admettent pour dérivées :
$u'(x)=-2$; $v'(x)=0{,}2\cdot e^{0{,}2\cdot x-3}$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = u'(x){\cdot}v(x) + u(x){\cdot}v'(x)$$
$$= -2{\cdot}e^{0,2\cdot x-3} + \big(-2{\cdot}x+30\big){\cdot}\big(0,2{\cdot}e^{0,2\cdot x-3}\big)$$
$$= -2{\cdot}e^{0,2\cdot x-3} + \big(-0,4{\cdot}x+6\big){\cdot}e^{0,2\cdot x-3}$$
$$= \big(-2-0,4{\cdot}x+6\big){\cdot}e^{0,2\cdot x-3} = \big(-0,4{\cdot}x+4\big){\cdot}e^{0,2\cdot x-3}$$

b. La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, on en déduit que le signe de la fonction f a le même signe que son facteur $-0,4{\cdot}x+4$.

La fonction w définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :
$$w(x) = -0,4{\cdot}x+4$$
est une fonction affine qui est décroissante car son coefficient directeur est négatif et qui s'annule en :
$$w(x) = 0$$
$$-0,4{\cdot}x+4 = 0$$
$$-0,4{\cdot}x = -4$$
$$x = \frac{-4}{-0,4}$$
$$x = 10$$
On en déduit que ce facteur admet pour tableau de signe :

x	$-\infty$		10		$+\infty$
$-0,4{\cdot}x+4$		$+$	0	$-$	

Ainsi, la fonction f' admet pour tableau de signe sur l'intervalle $\big[-20\,;20\big]$:

x	-20		10		20
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Par la fonction f, on a les images suivantes :

- $f(-20) = \big[-2{\cdot}\big(-20\big)+30\big]{\cdot}e^{0,2\times(-20)-3}$
  $= \big(40+30\big){\cdot}e^{-4-3} = 70{\cdot}e^{-7} \simeq 0,064$
- $f(-10) = \big[-2{\cdot}\big(-10\big)+30\big]{\cdot}e^{0,2\times(-10)-3}$
  $= \big(20+30\big){\cdot}e^{-2-3} = 50{\cdot}e^{-5} \simeq 3,679$
- $f(20) = \big(-2{\cdot}20+30\big){\cdot}e^{0,2\times 20-3}$
  $= \big(-40+30\big){\cdot}e^{4-3} = -10{\cdot}e^{1} \simeq -27,183$

On obtient le tableau de variation de la fonction f :

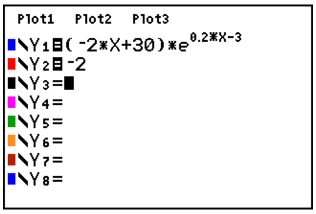
x	-20		10		20
Variation de f	$70{\cdot}e^{-7}$	$\nearrow$	$50{\cdot}e^{-5}$	$\searrow$	$-10{\cdot}e^{1}$

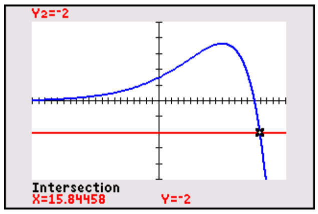
2. a.
- Sur l'intervalle $\big[-20\,;10\big]$, la fonction f est strictement positive. Ainsi, l'inéquation $f(x)=-2$ n'admet aucune solution.
- Sur l'intervalle $\big[10\,;20\big]$, la fonction f a pour propriété :
  - la fonction f est continue sur $\big[10\,;20\big]$;
  - la fonction f est strictement décroissante sur $\big[10\,;20\big]$;
  - le nombre -2 est compris entre les images de 10 et 20 par la fonction f.

  D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $\big[10\,;20\big]$.

Ainsi, on en déduit que l'équation $f(x)-2$ admet une unique solution sur l'intervalle $\big[-20\,;20\big]$.

b. On a les captures d'écran ci-dessous :





On a l'encadrement de la racine α : $15,8 \leqslant \alpha \leqslant 15,9$

Correction 10

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :
$$f(x) = 10 - \frac{u(x)}{v(x)}$$
où les fonctions u et v sont définies par :
$$u(x) = e^{0,2\cdot x+1} \quad ; \quad v(x) = x$$
qui admettent pour dérivée :
$$u'(x) = 0,2{\cdot}e^{0,2\cdot x+1} \quad ; \quad v'(x) = 1$$
La formule de dérivation d'un quotient permet d'exprimer la fonction f' dérivée de la fonction f :
$$f'(x) = 0 - \frac{u'(x){\cdot}v(x) - u(x){\cdot}v'(x)}{\big[v(x)\big]^2}$$
$$= -\frac{0,2{\cdot}e^{0,2\cdot x+1}{\cdot}x - e^{0,2\cdot x+1}{\cdot}1}{x^2} = -\frac{\big(0,2x-1\big){\cdot}e^{0,2\cdot x+1}}{x^2}$$
$$= \frac{\big(1-0,2x\big){\cdot}e^{0,2\cdot x+1}}{x^2}$$

2. Le facteur $1-0,2{\cdot}x$ a pour signe sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$1-0,2{\cdot}x$		$+$	0	$-$	

La fonction exponentielle étant strictement positif ainsi que le dénominateur x^2, le signe de la fonction f' sur $\big[1\,;25\big]$ est celui du facteur $1-0,2{\cdot}x$:

x	1		5		25
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

On a les images suivantes par la fonction f :

- $f(1) = 10 - \dfrac{e^{0,2\times 1+1}}{1} = 10 - e^{0,2+1} = 10 - e^{1,2}$
  $\simeq 6,6798 \simeq 6,680$
- $f(5) = 10 - \dfrac{e^{0,2\times 5+1}}{5} = 10 - \dfrac{e^{1+1}}{5} = 10 - \dfrac{e^2}{5}$
  $\simeq 8,5221 \simeq 8,522$
- $f(25) = 10 - \dfrac{e^{0,2\times 25+1}}{25} = 10 - \dfrac{e^{5+1}}{25} = 10 - \dfrac{e^6}{25}$
  $\simeq -6,1371 \simeq -6,137$

On a le tableau de variations :

x	1		5		25
Variation de f	$6,680$	$\nearrow$	$8,522$	$\searrow$	$-6,137$

3. a. Sur l'intervalle $\big[1\,;5\big]$, la fonction f est minorée par 6,680 : elle est donc strictement positive sur $\big[1\,;5\big]$.

L'équation $f(x)=0$ admet donc une unique solution sur l'intervalle $\left[1\,;5\right]$.

b. La fonction f vérifie les propriétés suivantes :

- la fonction f est continue sur $\left[5\,;\,25\right]$
- la fonction f est strictement décroissante sur $\left[5\,;\,25\right]$
- le nombre 0 est compris entre les images de 5 et 25 par la fonction f.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α solution de l'équation $f(x)=0$ sur l'intervalle $\left[5\,;25\right]$.

c. A l'aide de la calculatrice, on a :
$\alpha \simeq 21{,}959$

L'intervalle $\left[21{,}95\,;\,21{,}96\right]$ réalise un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α :

- $f(21{,}95) = 0{,}01351$
- $f(21{,}96) = -0{,}0019$

