

Etudes de fonctions

Correction 1

- a. Le polynôme $2x^2 - 3x - 2 = 0$ admet pour discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux racines suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-3) - 5}{2 \times 2} & &= \frac{-(-3) + 5}{2 \times 2} \\ &= \frac{-2}{4} & &= \frac{8}{4} \\ &= -\frac{1}{2} & &= 2 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{1}{2}; 2 \right\}$

- b. Le polynôme $-4x^2 + 12x - 9$ admet pour discriminant :
 $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 12^2 - 4 \times (-4) \times (-9) = 144 - 144 = 0$

Le discriminant étant nul, on en déduit que ce polynôme admet une unique racine :

$$x = -\frac{b}{2 \cdot a} = -\frac{12}{2 \times (-4)} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

- c. Le polynôme $x^2 - 3x + 1$ admet pour discriminant :
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 9 - 4 = 5$

Le discriminant étant strictement positif, cette équation admet les deux racines suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-3) - \sqrt{5}}{2 \times 1} & &= \frac{-(-3) + \sqrt{5}}{2 \times 1} \\ &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2 \times 1} & &= \frac{3 + \sqrt{5}}{2 \times 1} \\ &= \frac{3 - \sqrt{5}}{2} & &= \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est : $\mathcal{S} = \left\{ \frac{3 - \sqrt{5}}{2}; \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right\}$

- d. L'expression $3x^2 - 4x + 2$ admet pour discriminant :
 $\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 16 - 24 = -8$

Le discriminant étant strictement négatif, cette équation n'admet pas de solution.

Correction 2

- La réponse a. est fautive :

$$\begin{aligned} -\frac{(-2)^2}{3} + (-2)^2 + 3 \times (-2) &= -\frac{8}{3} + 4 - 6 \\ &= \frac{-8 + 12 - 18}{3} = \frac{-14}{3} \neq 0 \end{aligned}$$

Le nombre -2 n'est pas une solution de l'équation.

- On a la factorisation suivante :

$$-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x \cdot (x^2 - 3 \cdot x - 9)$$

Ainsi, l'équation proposée se traduit par une équation-produit :

$$-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3 \cdot x = 0$$

$$-\frac{1}{3} \cdot x \cdot (x^2 - 3 \cdot x - 9) = 0$$

Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

$$\begin{array}{l|l} -\frac{1}{3} \cdot x = 0 & x^2 - 3 \cdot x - 9 = 0 \\ x = 0 & \end{array}$$

Le nombre 0 n'est pas une racine du second facteur. Etudions le nombre de racine du polynôme définissant le second facteur. Pour cela, regardons le signe de son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-9) = 9 + 36 = 45 > 0$$

Son discriminant étant strictement positif, on en déduit que ce polynôme admet deux racines distinctes.

Ces deux racines étant distinctes de 0, au total l'équation de l'énoncé admet trois solutions distinctes.

Ainsi, la réponse exacte est b.

Correction 3

- a. L'expression présentée est un polynôme du second degré dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 9 + 16 = 25$$

On a la simplification suivante :

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{25} = 5$$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-(-3) - 5}{2 \times 2} & &= \frac{-(-3) + 5}{2 \times 2} \\ &= \frac{3 - 5}{4} & &= \frac{3 + 5}{4} \\ &= \frac{-2}{4} & &= \frac{8}{4} \\ &= -\frac{1}{2} & &= 2 \end{aligned}$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement positif, on en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$2x^2-3x-2$	+	0	-	0	+

- b. Commencant par étudier le facteur $3x^2 - 2x - 1$ qui est un polynôme du second degré et dont le discriminant a pour valeur :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{16} = 4$

Le discriminant du polynôme étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} & x_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ &= \frac{-2 - 4}{2 \times 1} & &= \frac{-2 + 4}{2 \times 1} \\ &= \frac{-6}{2} & &= \frac{2}{2} \\ &= -3 & &= 1 \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$		
$3x^2-2x-1$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
$2x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
$(2x+1)(3x^2-2x-1)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Correction 4

1. La fonction f' dérivée de la fonction f a pour expression :

$$f'(x) = 1,5 \cdot (3 \cdot x^2) - 9 \cdot (2 \cdot x) + 24 \times 1 + 0$$

$$= 4,5 \cdot x^2 - 18 \cdot x + 24$$

2. La fonction f'' dérivée de la fonction f' a pour expression :

$$f''(x) = 4,5 \cdot (2 \cdot x) - 18 \times 1 = 9 \cdot x - 18$$

Correction 5

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du produit des fonctions u et v où :

$$u(x) = x^5 ; \quad v(x) = x^2 - 1$$

qui admettent les fonctions dérivées :

$$u'(x) = 5 \cdot x^4 ; \quad v'(x) = 2x$$

Ainsi, la fonction g admet pour dérivée la fonction g' dont l'expression est :

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) = 5 \cdot x^4 \cdot (x^2 - 1) + x^5 \cdot (2x)$$

$$= 5 \cdot x^6 - 5 \cdot x^4 + 2 \cdot x^6 = 7 \cdot x^6 - 5 \cdot x^4$$

2. L'expression de la fonction g est définie par le quotient des fonctions u et v définies par :

$$u(x) = x^2 - 3x ; \quad v(x) = 2x - 4$$

qui admettent pour dérivée :

$$u'(x) = 2x - 3 ; \quad v'(x) = 2$$

Ainsi, la fonction g admet pour dérivée la fonction h' dont l'expression est :

$$g'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[v(x)]^2} = \frac{(2x-3)(2x-4) - (x^2-3x) \cdot 2}{(2x-4)^2}$$

$$= \frac{4x^2 - 8x - 6x + 12 - 2x^2 + 6x}{(2x-4)^2} = \frac{2x^2 - 8x + 12}{(2x-4)^2}$$

Correction 6

Graphiquement, la fonction g admet le tableau de variation suivant :

x	0	1	3	5
Variation de g				

Ainsi, la fonction dérivée g' de la fonction g admet le tableau de signe suivant :

x	0	1	3	5	
$g'(x)$	+	0	-	0	+

L'unique réponse correcte est la réponse **b.** car le signe de g' est positif sur l'intervalle $[3; 5]$.

Correction 7

1. La réponse correcte est **a.** :
La tangente T_1 à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 est horizontale : son coefficient directeur est nul.
On en déduit la valeur du nombre dérivé de la fonction f en 1 :
 $f'(1) = 0$

2. La réponse correcte est **b.** :
La tangente T_0 à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 passe par les points :
 $A(0; 0) ; C(3; 2)$
Le coefficient directeur de la droite T_0 a pour valeur :
 $\frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{3 - 1}{2 - 0} = \frac{2}{2} = 1$
On en déduit le nombre dérivé de la fonction f en 0 :
 $f'(0) = 1$.

3. La réponse correcte est **d.** :
Le point B est le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1. Son ordonnée est donc l'image de B .
Graphiquement, on peut affirmer que : $1 < f(1) \leq 1,5$

Correction 8

1. La dérivation d'une somme s'effectue termes à termes. Ainsi, la fonction f' dérivée de la fonction f admet pour expression :

$$f'(x) = (2x) - 6 \times (1) + 0 = 2x - 6$$

2. On a les valeurs suivantes :

$$\bullet f(2) = 2^2 - 6 \times 2 + 5 = 4 - 12 + 5 = -3$$

$$\bullet f'(2) = 2 \times 2 - 6 = 4 - 6 = -2$$

L'équation de la tangente (d) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 a pour équation :

$$y = f'(2) \cdot (x - 2) + f(2)$$

$$y = -2 \cdot (x - 2) + (-3)$$

$$y = -2 \cdot x + 4 - 3$$

$$y = -2 \cdot x + 1$$

3. On a les valeurs suivantes :

$$\bullet f(5) = 5^2 - 6 \times 5 + 5 = 25 - 30 + 5 = 0$$

$$\bullet f'(5) = 2 \times 5 - 6 = 10 - 6 = 4$$

L'équation de la tangente (Δ) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 5 a pour équation :

$$y = f'(5) \cdot (x - 5) + f(5)$$

$$y = 4 \cdot (x - 5) + 0$$

$$y = 4 \cdot x - 20$$

Correction 9

1. La fonction f est continue sur les intervalles :
 $[-4; -2]$; $] -2; 1[$; $[1; 4]$
2. $\bullet$ La fonction f est strictement croissante sur les intervalles :
 $[-4; -2,5]$; $[-1; 1[$; $[2,5; 4]$
- $\bullet$ La fonction f est strictement décroissante sur les intervalles :
 $[-2,5; -2]$; $] -2; -1[$; $[1; 2,5]$

Correction 10

1. L'expression de la fonction f est donnée sous la forme du quotient des deux fonctions u et v définies par :

$$u(x) = 3x + 4 \quad ; \quad v(x) = x^2 + 1$$

qui admettent pour dérivées :

$$u'(x) = 3 \quad ; \quad v'(x) = 2x$$

La formule de dérivation d'un quotient permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{[u(x)]^2} = \frac{3 \cdot (x^2 + 1) - (3x + 4) \cdot (2x)}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^2 + 3 - 6x^2 - 8x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-3x^2 - 8x + 3}{(x^2 + 1)^2}$$

Le dénominateur étant strictement positif, déterminons le signe du numérateur qui est un polynôme du second degré :

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-8)^2 - 4 \times (-3) \times 3 = 64 + 36 = 100$$

On a la simplification : $\sqrt{\Delta} = \sqrt{100} = 10$

Le discriminant étant strictement positif, ce polynôme admet les deux racines suivantes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$= \frac{-(-8) - 10}{2 \times (-3)} \quad = \frac{-(-8) + 10}{2 \times (-3)}$$

$$= \frac{8 - 10}{-6} \quad = \frac{8 + 10}{-6}$$

$$= \frac{-2}{-6} \quad = \frac{18}{-6}$$

$$= \frac{1}{3} \quad = -3$$

Le coefficient du terme du second degré étant strictement négatif, le quotient définissant la fonction f' admet pour signe :

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

La fonction f admet les images :

$$\bullet f(-3) = \frac{3 \times (-3) + 4}{(-3)^2 + 1} = \frac{-9 + 4}{9 + 1} = \frac{-5}{10} = -\frac{1}{2}$$

$$\bullet f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3 \times \frac{1}{3} + 4}{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1} = \frac{1 + 4}{\frac{1}{9} + 1} = \frac{5}{\frac{1 + 9}{9}} = \frac{5}{\frac{10}{9}} = 5 \times \frac{9}{10} = \frac{9}{2}$$

On obtient le tableau de variations de la fonction f :

x	$-\infty$	-3	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
Variation de f		$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$	

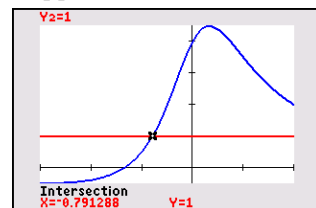
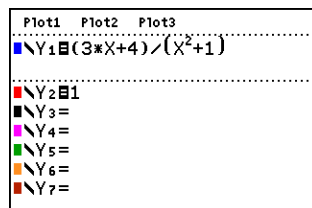
2. a. La fonction f vérifie les propriétés ci-dessous :

- La fonction f est continue sur l'intervalle $\left[-3; \frac{1}{3}\right]$;
- La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[-3; \frac{1}{3}\right]$;

- Le nombre 1 est compris entre les images $-\frac{1}{2}$ et $\frac{9}{2}$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur l'intervalle $\left[-3; \frac{1}{3}\right]$.

- b. Voici deux captures de l'écran de la calculatrice lors de la recherche de la valeur approchée :



La valeur approchée recherchée est : $-0,79$

Correction 11

D'après le tableau de signe de la fonction f' et sachant qu'elle s'annule pour $x=3$, la fonction f admet le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
Variation de f			0		

On peut compléter le tableau de signe de la fonction f sur l'intervalle $[1; 5]$:

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

On fait les remarques suivantes :

- La fonction f ne peut prendre de valeur positive sur l'intervalle $]-\infty; 1]$, car sinon, elle changerait de signe sur $]-\infty; 1]$.
Ce qui est impossible car alors elle changera de signe sur $]-\infty; 3]$.
La fonction f est strictement négative sur $]-\infty; 3]$.
- La fonction f ne peut prendre de valeur négative sur l'intervalle $[5; +\infty[$, car sinon, elle changerait de signe sur $[3; +\infty[$.
Ce qui est impossible car alors elle changera de signe sur $[3; +\infty[$.
La fonction f est strictement négative sur $[3; +\infty[$.

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

Correction 12

L'expression de la fonction f est donnée sous la forme :

$$f(x) = 3x - u(x) \cdot v(x)$$

où les fonctions u et v sont définies par :

$$u(x) = 3x \quad ; \quad v(x) = \ln(x)$$

qui admettent pour dérivées :

$$u'(x) = 3 \quad ; \quad v'(x) = \frac{1}{x}$$

La formule de dérivation d'un produit permet d'obtenir l'expression de la fonction f' dérivée de la fonction f :

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 3 - [u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)] \\
 &= 3 - \left[3 \cdot \ln(x) + 3 \cdot x \times \frac{1}{x} \right] = 3 - [3 \cdot \ln(x) + 3] \\
 &= 3 - 3 \cdot \ln(x) - 3 = -3 \cdot \ln(x)
 \end{aligned}$$

Ainsi, la dérivée seconde f'' , dérivée de la fonction f' , a pour expression :

$$f''(x) = 3 \times \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{3}{x^2}$$

La dérivée seconde de la fonction f étant strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que la fonction f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, toutes les tangentes à la courbe $\mathcal{C}_f$ se situe au-dessus de la courber $\mathcal{C}_f$. Il en est de même de la tangente T .