Suites

Correction 1

1. Pour qu'une suite soit arithmétique, il faut que la différence de deux termes consécutifs soit constante. Or, pour la suite (u_n), la différence de termes consécutifs n'est pas constant :
$u_1 - u_0 = 5 - 2 = 3 \quad ; \quad u_2 - u_1 = 9 - 5 = 4$
La suite (u_n) n'est pas une suite arithmétique.

2. Pour qu'une suite soit géométrique, il faut que le quotient de deux termes consécutifs soit constant ; or, ce n'est pas le cas pour la suite (v_n) :
$$\frac{v_1}{v_0} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad ; \quad \frac{v_3}{v_2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$
La suite (v_n) n'est pas une suite géométrique.

Correction 2

1. Une suite géométrique de raison 3 vérifie la relation de récurrence suivante :
$u_{n+1} = 3 \cdot u_n$
Voici les cinq premiers termes de la suite (u_n) :
   - $u_0 = 2$
   - $u_1 = 3 \times u_0 = 3 \times 2 = 6$
   - $u_2 = 3 \times u_1 = 3 \times 6 = 18$
   - $u_3 = 3 \times u_2 = 3 \times 18 = 54$
   - $u_4 = 3 \times u_3 = 3 \times 54 = 162$

2. Voici les six premiers termes de la suite (v_n) :
   - $v_0 = -2$
   - $v_1 = \frac{1}{2} \cdot v_0 = \frac{1}{2} \times (-2) = -1$
   - $v_2 = \frac{1}{2} \cdot v_1 = \frac{1}{2} \times (-1) = -\frac{1}{2}$
   - $v_3 = \frac{1}{2} \cdot v_2 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$
   - $v_4 = \frac{1}{2} \cdot v_3 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{8}$
   - $v_5 = \frac{1}{2} \cdot v_4 = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{16}$

Correction 3

a. Les trois premiers termes de la suite (u_n) ont pour valeur :
$u_0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 4 \quad ; \quad u_2 = 7$
Or, on a : $\frac{u_1}{u_0} = 4 \quad ; \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{7}{4}$
Ainsi, on ne passe d'un terme à l'autre en multipliant par un même nombre : la suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.

b. On a les transformations algébriques suivantes :
$u_n = 5^n + 5^{n+1} = 5^n + 5 \times 5^n = 5^n \cdot (1+5) = 6 \times 5^n$
L'expression des termes de la suite (u_n) permettent de reconnaître la suite géométrique de premier terme 6 et de raison 5.

c. On a les transformations algébriques suivantes :
$$u_n = 2 \times \frac{4^n}{3^{n+1}} = 2 \times \frac{4^n}{3 \times 3^n} = \frac{2}{3} \times \frac{4^n}{3^n} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{4}{3}\right)^n$$
L'expression des termes de la suite (u_n) permettent de reconnaître la suite géométrique de premier terme $\frac{2}{3}$ et de raison $\frac{4}{3}$.

d. Les trois permiers termes de la suite (u_n) sont :
$u_0 = 0^0 = 1 \quad ; \quad u_1 = 1^1 = 1 \quad ; \quad u_2 = 2^2 = 4$
On remarque qu'on ne passe pas d'un terme à l'autre en multipliant par un même nombre : la suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.

Correction 4

La formule de la somme des termes d'une suite géométrique de raison différent de 1 permet d'écrire :
$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{12} = 1 \times \frac{1-2^{13}}{1-2} = \frac{1-2^{13}}{-1}$$
$$= 2^{13} - 1 = 8192 - 1 = 9191$$
La réponse exacte est b.

Correction 5

Les deux lignes de l'algorithme :

```
U ← 50
U ← 1,2×U
```

Ainsi, les valeurs successives de la variable U représentent les termes de la suite (u_n) arithmétique de premier terme 50 et de raison 1,2.
Les termes de la suite (u_n) admettent pour valeur en fonction de leur rang n :
$u_n = 50 \times 1{,}2^n$

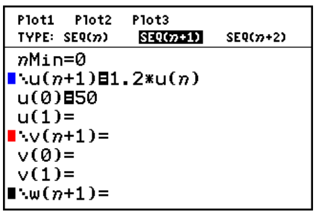
La boucle de l'algorithme va être exécuté tant que la clause :

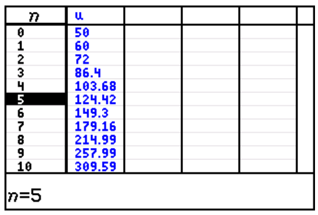
```
Tant que U<120
```

est vérifiée.

Deux méthodes sont possibles :

- A l'aide de la calculatrice :





  On remarque que c'est à partir du rang 5 que les termes de la suite sont supérieurs à 120. La valeur de la variable `n` en fin d'exécution sera 5.

- A l'aide du logarithme népérien :

  Ainsi, la valeur de la variable `n` en fin d'exécution de l'algorithme est le rang du premier terme de la suite ne vérifiant plus cette clause. Résolvons l'inéquation :

$$u_n \geqslant 120$$
$$50\times1{,}2^n \geqslant 120$$
$$1{,}2^n \geqslant \frac{120}{50}$$
$$1{,}2^n \geqslant 2{,}4$$

La fonction logarithme étant strictement croissante :

$$\log\left(1{,}2^n\right) \geqslant \log\left(2{,}4\right)$$
$$n\cdot\log\left(1{,}2\right) \geqslant \log\left(2{,}4\right)$$
$$n \geqslant \frac{\log\left(2{,}4\right)}{\log\left(1{,}2\right)}$$

On a la valeur approchée : $\frac{\ln 2{,}4}{\ln 1{,}2} \simeq 4{,}801$

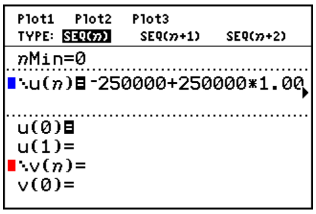
$$n \geqslant 5$$

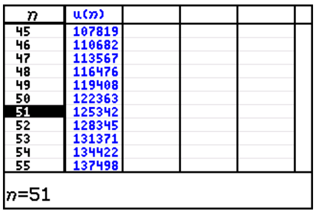
Ainsi, en fin d'exécution de l'algorithme, la variable `n` aura la valeur 5.

La réponse correcte est la réponse c..

Correction 6

D'après la calculatrice :





C'est à partir du rang 51 que la suite S_n a une valeur supérieure à 125 000.

Correction 7

1. Le premier terme de la suite (v_n) a pour valeur :
$v_0 = u_0 - 255 = 150 - 225 = -75$

Le terme de rang $n+1$ de la suite (v_n) a pour expression :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 225 = \left(0{,}8\cdot u_n + 45\right) - 225 = 0{,}8\cdot u_n - 180$$
$$= 0{,}8\cdot\left(u_n - \frac{180}{0{,}8}\right) = 0{,}8\cdot\left(u_n - 225\right) = 0{,}8\cdot v_n$$

Cette dernière relation montre que la suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme -75 et de raison 0,8.

2. La suite (v_n) étant géométrique de premier terme -75 et de raison 0,8 a ses termes de rang n, pour n un entier naturel, qui admettent pour expression :
$v_n = -75\times0{,}8^n$

De la définition des termes de la suite (v_n), on a la relation :

$$v_n = u_n - 225$$
$$-75\times0{,}8^n = u_n - 225$$
$$u_n = -75\times0{,}8^n + 225$$

Correction 8

1. Par définition des termes de la suite (v_n), le terme de rang $n+1$ est défini par :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 12\,000$$

Par définition des termes de la suite (u_n) :

$$v_{n+1} = \left(0{,}75\cdot u_n + 3\,000\right) - 12\,000$$
$$v_{n+1} = 0{,}75\cdot u_n - 8\,000$$
$$v_{n+1} = 0{,}75\cdot\left(u_n - \frac{9\,000}{0{,}75}\right)$$
$$v_{n+1} = 0{,}75\cdot\left(u_n - 12\,000\right)$$

Par définition des termes de la suite (v_n) :

$$v_{n+1} = 0{,}75\cdot v_n$$

Cette relation de récurrence permet d'établir que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,75.

Cette suite a pour premier terme :
$v_0 = u_0 - 12\,000 = 10\,000 - 12\,000 = -2\,000$

2. La suite (v_n) est la suite géométrique de premier terme $-2\,000$ et de raison 0,75. Ainsi, son terme de rang n admet pour expression explicite :
$v_n = -2\,000\times0{,}75^n$

La raison de la suite (v_n) vérifie l'encadrement $0\leqslant0{,}75<1$. Ainsi, on a la limite :

$$\lim_{n\mapsto+\infty} 0{,}75^n = 0 \Longrightarrow \lim_{n\mapsto+\infty} -2\,000\times0{,}75^n = 0$$
$$\Longrightarrow \lim_{n\mapsto+\infty} v_n = 0$$

3. De la définition de la suite (u_n), nous avons l'ídentité suivante :

$$v_n = u_n - 12\,000$$
$$v_n + 12\,000 = u_n$$
$$u_n = -2\,000\times0{,}75^n + 12\,000$$

Correction 9

Le point C appartient à la courbe $\mathscr{C}_f$ et a pour abscisse 2. Son ordonnée a pour valeur :
$f(2) = 4\cdot e^{-0{,}4\times2} = 4\cdot e^{-0{,}8}$

Le rectangle $ABCD$ admet les longueurs AB et BC respectivement pour longueur et largeur. On a :
$AB = 2 \quad ; \quad BC = 4\cdot e^{-0{,}8}$

Ainsi, son aire $\mathscr{A}$ a pour mesure :
$\mathcal{A} = AB\times BC = 2\times4\cdot e^{-0{,}8} = 8\cdot e^{-0{,}8}$
$\simeq 3{,}5946 \simeq 3{,}6\,m^2$

Correction 10

1. Le premier terme de la suite (v_n) a pour valeur :
$v_0 = u_0 - 50 = 75 - 50 = 25$

Le terme de rang $n+1$ de la suite (v_n) admet pour définition :
$v_{n+1} = u_{n+1} - 50$

Par définition des termes de la suite (u_n) :

$$v_{n+1} = \left(1{,}12\cdot u_n - 6\right) - 50$$
$$v_{n+1} = 1{,}12\cdot u_n - 56$$
$$v_{n+1} = 1{,}12\cdot\left(u_n - \frac{56}{1{,}12}\right)$$
$$v_{n+1} = 1{,}12\cdot\left(u_n - 50\right)$$
$$v_{n+1} = 1{,}12\cdot v_n$$

Cette relation de récurrence permet d'affirmer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 1,12 et de premier terme 25.

2. Des caractéristiques de la suite (v_n) évoquée à la question précédente, on en déduit l'expression explicite des termes de la suite (v_n) :
$v_n = 25 \times 1{,}12^n$.

De la définition des termes de la suite (v_n), on a la relation :

$$\begin{aligned} v_n &= u_n - 50 \\ v_n + 50 &= u_n \\ u_n &= 25 \times 1{,}12^n + 50 \end{aligned}$$

3. Résolvons l'inéquation :

$$\begin{aligned} u_n &> 100 \\ 25 \times 1{,}12^n + 50 &> 100 \\ 25 \times 1{,}12^n &> 100 - 50 \\ 25 \times 1{,}12^n &> 50 \\ 1{,}12^n &> \frac{50}{25} \\ 1{,}12^n &> 2 \end{aligned}$$

La fonction logarithme est croissante :

$$\begin{aligned} \ln\left(1{,}12^n\right) &> \ln 2 \\ n \cdot \ln 1{,}12 &> \ln 2 \\ n \cdot \ln 1{,}12 &> \ln 2 \end{aligned}$$

Le nombre $\ln 1{,}12$ est positif :

$$n > \frac{\ln 2}{\ln 1{,}12}$$

On a la valeur arrondie : $\dfrac{\ln 2}{\ln 1{,}12} \simeq 6{,}1$

$$n \geqslant 7$$

Ainsi, l'ensemble des entiers naturels est l'ensemble des entiers supérieurs ou égal à 7.

